目　　录

第一章　拓扑空间

§1.1　度量空间与度量拓扑

A　内容提要

贯穿本书，采用下述记号：

$\mathbf{R}=\{x|x$ 为实数$\}$，　$\mathbf{Q}=\{x|x$ 为有理数$\}$，

$\mathbf{Z}=\{x|x$ 为整数$\}$，　$\mathbf{N}=\{n|n$ 为自然数$\}$.

$\forall\ x\cdots$，表示对于每个（任意一个）$x\cdots$.

$\exists\ x\cdots$，表示存在 $x\cdots$.

s.t. …，表示使得….

$\mathscr{P}(X)$表示集合 X 的幂集.

1.1.1 定义　设 X 为非空集，映射 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 满足下述度量公理：$\forall\ x,y,z\in X$

[M.1] 非负性　$\rho(x,y)\geqslant 0$，

[M.2] 对称性　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

[M.3] 三角不等式　$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$，

[M.4] 分离性　$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$，

则称 ρ 为 X 上的度量，$\rho(x,y)$为 x 与 y 间的距离，$\langle X,\rho\rangle$为度量空间.

若 $S\subset X$，ρ 为 X 的度量，则称$\langle S,\rho|_{S\times S}\rangle$为$\langle X,\rho\rangle$的子空间.

1.1.2 定义　在度量空间$\langle X,\rho\rangle$中，

$$B_\rho(x,\varepsilon)=\{y\in X|\rho(x,y)<\varepsilon\},(x\in X,\varepsilon>0),$$

叫做点 x 的球形邻域或以 x 为中心，ε 为半径的开球.

设 $G\subset X$，如果$\forall\ x\in G$，$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$，则称 G 为 X 的 ρ-开集.

1.1.3 定理　在度量空间$\langle X,\rho\rangle$中，

(1)　每个 $B_\rho(x,\varepsilon)$是 X 的开集，

(2)　$\varnothing$，X 都是 X 的开集，

(3)　X 的任意两个开集的交是 X 的开集.

(4)　X 的任意多个开集的并是 X 的开集.

1.1.4 定义　度量空间$\langle X,\rho\rangle$的全体开集组成的集族τ_ρ叫做X的由ρ诱导的拓扑，也叫度量拓扑．如果X上的两个度量ρ_1,ρ_2诱导相同的拓扑，就说ρ_1,ρ_2是等价的．

1.1.5 定义　设A,B为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集．

$$\rho(A,B)\xlongequal{\text{def}}\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

叫做A与B的距离，$\rho(x,B)\xlongequal{\text{def}}\rho(\{x\},B)$叫做点$x$与集$B$的距离．

$$\delta(A)=\begin{cases}\sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}, & \text{当}\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}\text{有界时},\\ +\infty & \text{否则}.\end{cases}$$

叫做A的直径．当$\delta(A)<+\infty$时，叫A为有界子集．

B　例题

(一)

度量空间是欧氏空间的推广，又是拓扑空间的最好原型．搞清楚度量空间的拓扑结构对于掌握一般拓扑空间的概念是有益的．解度量空间的问题一般都要紧紧抓住度量函数及点的球形邻域，处理的方法基本上与数学分析中用ε-邻域处理的方法类似．即使后来把度量空间作为拓扑空间的特例来处理时，度量函数与球形邻域仍然起重要作用．

1.1.1(1)　设$X=\{f:[a,b]\to\mathbf{R}\mid f$连续[①]$\}$，

定义　$\rho:X\times X\to\mathrm{R}$为$\forall f,g\in X$

$$\rho(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt.$$

证明ρ是X的度量．

(2)　如将上述"f连续"的条件换成"f在$[a,b]$上R-可积"，那么ρ是否仍是X的度量？

解　(1)　由ρ的定义，显然满足[M.1]，[M.2]，[M.3]．只需验证[M.4]．而当$f=g$时，显然有$\rho(f,g)=0$

现若$\rho(f,g)=0$，即

$$\int_a^b|f(t)-g(t)|dt=0.$$

我们证明$f=g$．假定$f\neq g$，则$\exists\, t_0\in[a,b]$ s.t. $f(t_0)\neq g(t_0)$．由微积分学中关于连续函数的性质知，$\exists\,\delta>0$ s.t. $\forall\, t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap[a,b]$，$|f(t)-g(t)|>0$．于是必存在包含$t_0$的区间$[c,d]$$(c<d)$使

$$[c,d]\subset(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap[a,b]$$

则

$$\rho(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt\geqslant\int_c^d|f(t)-g(t)|dt>0,$$

导致矛盾．所以必有$f=g$．故[M.4]成立．这就验证了ρ是X的度量．

---

① 本节涉及到的函数连续的概念以及序列收敛的概念，都是微积分中的概念．

(2) 由于对任一 R-可积函数 f，只要改变有限个点处的值就得另一个可积函数 g，此时 $f\neq g$，但 $\rho(f,g)=0$. 所以不满足分离性条件[M. 4]. 从而 ρ 就不再是度量． □

注 度量公理中的这个条件往往容易被疏忽．如果我们删去分离性条件[M. 4]，其它三个条件不变，则称 ρ 为伪度量．以后将会看到伪度量空间与度量空间虽有许多相同之处，但本质上不同的一点，就是度量空间具有所谓 Hausdorff 性质，即任意两个不同的点都能用不相交的邻域隔开，在这种空间中，序列的极限是唯一的，而伪度量空间则不然．

1.1.2 判断下述定义的映射 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 是否为 X 的度量，又是否为伪度量：

(1) $X=\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})\xlongequal{\text{def}}\{f:[0,1]\to\mathbf{R}\mid f\text{ 连续}\}$，

$\rho(f,g)=|f(0)-g(0)|\quad(\forall f,g\in X)$；

(2) X 为非空集，$f: X\to\mathbf{R}$ 为一已知映射，

$\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|\ (\forall x,y\in X)$；

(3) $X=\{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\mid\forall n, x_n\in\mathbf{R}, \langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\text{收敛}\}$，

$\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|$，$(\forall x=\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}, y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in X)$；

(4) $X=\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \forall x=\langle x_n\rangle_{n\in N}, y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in X$，

$\rho(x,y)=\sup\{\min\{|x_n-y_n|,1\}\mid n\in\mathbf{N}\}$

解 (1) 显然满足[M. 1]—[M. 3]，但当 $f\neq g$ 且 $f(0)=g(0)$ 时，也有

$$\rho(f,g)=|f(0)-g(0)|=0.$$

所以 ρ 不是度量而是伪度量．

(2) 显然满足 [M. 1]—[M. 3]，当 f 为单射时，也满足[M. 4]，此时 ρ 为度量，但当 f 不是单射时，不满足[M. 4]，此时 ρ 不是度量而是伪度量．

(3) 读者可自行验证 ρ 不是度量而是伪度量．

(4) 读者可自行验证 ρ 是度量． □

1.1.3 在 $\mathbf{R}$ 上，$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$. 令

$$\rho_1(x_1,x_2)=\left|\frac{x_1}{1+|x_1|}-\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|,$$

$$\rho_2(x_1,x_2)=\begin{cases}0 & x_1=x_2=0.\\ \left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right| & x_1\neq 0,,x_2\neq 0,\\ \left|\dfrac{1}{x_1}\right| & x_1\neq 0,x_2=0,\\ \left|\dfrac{1}{x_2}\right| & x_1=0,x_2\neq 0,\end{cases}$$

证明 ρ_1,ρ_2 都是 $\mathbf{R}$ 的度量．

证 可以直接分别验证 ρ_1,ρ_2 都满足[M. 1]—[M. 4]，但比较繁琐，如果 利用下述命题就十分简单了．

命题 设 $\langle Y,d\rangle$ 为度量空间，$f: X\to Y$ 为一一映射(既是满的又是单的映射叫一一映射)，则由

$$\rho(x_1,x_2)=d(f(x_1),f(x_2))\qquad(\forall x_1,x_2\in X)$$

定义的 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 是 X 的一个度量.

这个命题的证明可由 d 满足[M.1]—[M.4]利用 f 的一一性即得 ρ 也满足[M.1]—[M.4]. 它的直观意义非常明显,如同我们把地球上两点间的实际距离作为地球仪上对应的两点间的距离。

现令

$$f: \mathbf{R}\to(-1,1),\ x\mapsto\frac{x}{1+|x|};$$

$$g: \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto g(x)=\begin{cases}0 & x=0,\\ \dfrac{1}{x} & x\neq 0.\end{cases}$$

则 f,g 均为一一映射且 $\forall\ x_1,x_2\in\mathbf{R}$

$$\rho_1(x_1,x_2)=|f(x_1)-f(x_2)|,$$

$$\rho_2(x_1,x_2)=|g(x_1)-g(x_2)|.$$

故由上述命题即知 ρ_1,ρ_2 都是 $\mathbf{R}$ 的度量. □

注 "抽象"不等于"难",有时将具体问题一般化,经过"抽象"后反而显得更容易.

1.1.4 已知 $f: E^n\to E^1$ 为 n 元连续函数,证明 $\forall\ a,b\in E^1$,

$$A=\{x\in E^n\,|\,f(x)>a\},\quad B=\{x\in E^n\,|\,f(x)<b\},$$

$$C=\{x\in E^n\,|\,a<f(x)<b\},$$

都是 E^n 的开集.

注 这里以及今后我们总是用 E^n 表示 n 维欧氏空间,即在 $\mathbf{R}^n$ 上取欧氏度量.

证 先证 A 为 E^n 的开集. $\forall\ x\in A$,由于 $f(x)>a$,故$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $f(x)-\varepsilon>a$. 由 f 的连续性知 $\exists\ \delta>0$ s.t. 当 $\|x'-x\|<\delta$ 时 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$. 即

$$a<f(x)-\varepsilon<f(x')<f(x)+\varepsilon.$$

所以 $B(x,\delta)\subset A$. 依定义 E^n 为开集.

同理可证 B 为 E^n 的开集. 而 $C=A\cap B$,所以也是 E^n 的开集. □

1.1.5 证明 n 元函数 $f: E^n\to E^1$ 是连续的充要条件为:对于 E^1 的任一开集 G,$f^{-1}(G)$ 是 E^n 的开集.

证 假定 f 连续,G 可设为 $G=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda,b_\lambda)$,于是

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}((a_\lambda,b_\lambda)).$$

由 B1.1.4 可知,$\forall\ \lambda$,$f^{-1}((a_\lambda,b_\lambda))$ 是 E^n 的开集,从而 $f^{-1}(G)$是 E^n 的开集.

反之,$\forall\ x\in E^n$ 以及 $\varepsilon>0$,由于 $U=f^{-1}((f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon))$是 E^n 的开集,且 $x\in U$. 故 $\exists\ \delta>0$ s.t. $B(x,\delta)\subset U$. 故当 $\|y-x\|<\delta$ 时,$f(y)\in(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)$,即 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$,所以 f 连续. □

注 这里给出的用开集来刻划的连续函数的特征性质将被推广到一般的拓扑空间中去.

1.1.6 设 A 为度量空间 $\langle X,\rho\rangle$的任一非空子集,$c\in[0,+\infty)$,证明

$$G_1=\{x\in X\,|\,\rho(x,A)>c\},$$

$$G_2=\{x\in X\,|\,\rho(x,A)<c\}$$

都是 X 的开集．

证　设 $x\in G_1$，则 $\rho(x,A)>c$，于是 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\rho(x,A)-c)>0$. $\forall\ y\in B_\rho(x,\varepsilon)$ 以及 $z\in A$，

$$\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)-\rho(x,y)>\rho(x,z)-\varepsilon,$$

两端对 $z\in A$ 取下确界就得

$$\rho(y,A)\geqslant\rho(x,A)-\varepsilon=\rho(x,A)-\frac{1}{2}\rho(x,A)+\frac{c}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\rho(x,A)+\frac{c}{2}>c.$$

即 $y\in G_1$，所以 $B_\rho(c,\varepsilon)\subset G_1$，故 G_1 为开集．

对于 G_2，当 $c=0$ 时，$G_2=\varnothing$，故为开集，当 $c>0$ 时，与 G_1 类似地可证 G_2 是开集　□

注　特别地，当上述 $A=\{y\}$ 时，

$$\mathscr{C}\{y\}=\{x\in X\,|\,\rho(x,y)>0\}$$

是开集．即度量空间中，每个单点集的补集是开集，若把补集是开集的集合叫闭集，那么度量空间中每个单点集是闭集．

1.1.7　设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间，$\forall\ x,y\in X$，令

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\quad\rho_2(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$$

证明 ρ_1,ρ_2 也是 X 的度量，且 ρ_1,ρ_2 与 ρ 都是等价的度量．

证　易见要证 ρ_1,ρ_2 都是 X 的度量，只需验证三角不等式成立．对于 ρ_1，注意到函数 $f(t)=\frac{t}{1+t}$ 当 $t\geqslant 0$ 时为单调增函数．于是 $\forall\ x,y,z\in X$

$$\rho_1(x,z)=\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}\leqslant\frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$\leqslant\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}=\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z)$$

对于 ρ_2，

$$\begin{aligned}\rho_2(x,z)&=\min\{1,\rho(x,z)\}\leqslant\min\{1,\rho(x,y)+\rho(y,z)\}\\&\leqslant\min\{\rho(x,y)+\rho(y,z),1+\rho(x,y),1+\rho(y,z),2\}\\&=\min\{\rho(x,y),1\}+\min\{\rho(y,z),1\}\\&=\rho_2(x,y)+\rho_2(y,z).\end{aligned}$$

所以 ρ_1,ρ_2 都是 X 的度量．

下证 ρ_1,ρ_2 与 ρ 的等价性．

[法一]　易见 $\forall\ x,y\in X$　$\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant\rho(x,y)$. 又当 $\rho(x,y)<1$ 时，$\rho(x,y)\leqslant 2\rho_1(x,y)$. 所以当 $\varepsilon\in(0,1)$ 时，$\forall\ x\in X$

$$B_{\rho_1}(x,\varepsilon/2)\subset B_\rho(x,\varepsilon)\subset B_{\rho_2}(x,\varepsilon)\subset B_{\rho_1}(x,\varepsilon)\qquad(1.1-1)$$

现设 G 是 ρ_1-开的，则 $\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon\in(0,1)$ s.t. $B_{\rho_1}(x,\varepsilon)\subset G$. 由(1.1-1)知 $B_{\rho_2}(x,\varepsilon)\subset G$，所以 G 是 ρ_2-开的．

同理，如果 G 是 ρ_2-开的，那么 G 也是 ρ-开的．

现反过来设 G 是 ρ-开的，则 $\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon\in(0,1)$ s.t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$，由(1.1-1) 取 $\delta=$

$\varepsilon/2$ 就有 $B_{\rho_1}(x,\delta)\subset G$，所以 G 是 ρ_1-开的．

综合上述过程有：

$$G \text{ 为 } \rho_1\text{- 开的} \Rightarrow G \text{ 为 } \rho_2\text{- 开的} \Rightarrow G \text{ 为 } \rho\text{- 开的} \Rightarrow G \text{ 为 } \rho_1\text{- 开的}.$$

可见 ρ_1,ρ_2 与 ρ 都是等价的．

［法二］ 因为当 $\rho(x,y)<1$ 时，$\rho_2(x,y)=\rho(x,y)$，所以 $\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，$x\in X$

$$B_\rho(x,\varepsilon) = B_{\rho_2}(x,\varepsilon)$$

由此可得 ρ 与 ρ_2 等价，再证 ρ 与 ρ_1 等价．这可由 $\forall\ \varepsilon>0$，$x,y\in X$，

$$B_{\rho_1}\left(x,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) = B_\rho(x,\varepsilon) \subset B_{\rho_1}(x,\varepsilon)$$

得到．

［法三］ $\forall\ x,y\in X,\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant 2\rho_1(x,y).$ (1.1－2)

这是因为当 $\rho(x,y)<1$ 时，由定义可得 $2\rho_1(x.,y)\geqslant\rho(x,y)\geqslant\rho_2(x,y)$. 而当 $\rho(x,y)\geqslant 1$ 时，

$$2\rho_1(x,y) = \frac{2\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \geqslant \frac{1+\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = 1 \geqslant \rho_2(x,y).$$

所以(1.1－2)式成立．于是 ρ_1 与 ρ_2 等价，再由［法二］所证的 ρ 与 ρ_2 等价即得 ρ_1,ρ_2 与 ρ 都等价． □

注 这道题没有一个 $\forall\ \varepsilon>0$ 都成立的球形邻域的轮转的包含链．在上述三种方法中都在某个时候限制了 $\varepsilon<1$. 由于在开集定义中，"$\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon>0$ s. t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$"这个条件，总可选用小于 1 的 ε，所以上述证明过程中对 $\varepsilon<1$ 的限制是无妨的．

1.1.8 设 X 为非空集，$\rho:X\times X\to\mathbf{R}$ 满足条件：$\forall\ x,y,z\in X$，

(1) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(2) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$

证明：$\forall\ x,y\in X,\rho(x,y)\geqslant 0.$

证 首先，由(2)，(1)，$\forall\ x,y\in X$

$$\rho(x,x) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,x) = 2\rho(x,y).$$

特别地，让 $y=x$ 则得 $\rho(x,x)\leqslant 2\rho(x,x)$，故

$$\rho(x,x) \geqslant 0.$$

进而 $\forall\ x,y\in X$ $\quad 2\rho(x,y)\geqslant\rho(x,x)\geqslant 0$，所以

$$\rho(x,y) \geqslant 0.$$ □

注 由这道题可知，度量公理中非负性条件不是独立的．然而由 B1.1.1 可见分离性条件是独立的．

1.1.9 证明在任一度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 中，$\forall\ x\in X$ 都有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right) = \{x\}.$$

证 显然只需证 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)\subset\{x\}$.

设 $y\in X$ 且 $y\neq x$，则 $\rho(x,y)>0$. 于是 $\exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s. t. $\frac{1}{n_0}<\rho(x,y)$，从而 $y\notin B_\rho\left(x,\frac{1}{n_0}\right)$，更有 $y\notin\bigcap_{n=1}^{\infty} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$. 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)\subset\{x\}$. 故有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\rho}\left(x, \frac{1}{n}\right) = \{x\}$$ □

注　由本题可见度量空间中，任意多个开集(甚至可数无限个开集)之交未必是开集．

1.1.10　设 A,B 为度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 中的非空子集，证明

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B)$$

证　$\forall\ x,y \in A \cup B$

若 $x,y\in A$ 或 $x,y\in B$. 则显然有

$$\rho(x,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B).$$

现设 $x\in A, y\in B$. 因 $\forall\ n\in \mathbf{N}\ \exists\ a\in A, b\in B$ s.t.

$$\rho(a,b) < \rho(A,B) + \frac{1}{n},$$

所以

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\leqslant \rho(x,a) + \rho(a,b) + \rho(b,y)\\ &< \rho(x,a) + \rho(A,B) + \frac{1}{n} + \rho(b,y)\\ &\leqslant \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B) + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

让 $n\to\infty$ 取极限得

$$\rho(x,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B)$$

故

$$\begin{aligned}\delta(A \cup B) &= \sup\{\rho(x,y) \mid x,y \in A \cup B\}\\ &\leqslant \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B).\end{aligned}$$ □

注　利用数学归纳法我们可推广这一结果而有：

设 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 为度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 中有限个非空子集，则

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\delta(A_i) + \sum_{i=2}^{n}\rho(A_1,A_i).$$

1.1.11　设 $C\subset E^n$，如果 $\forall\ x,y\in C$ 都有

$$\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\} \subset C,$$

则称 C 为 E^n 的凸集，证明 E^n 的任一开球 $B(x,\varepsilon)$ 是凸集．

证　$\forall\ y,z\in B(x,\varepsilon), \forall\ t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}&\|(1-t)y + tz - x\| = \|(1-t)(y-x) + t(z-x)\|\\ &\leqslant (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| < (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $(1-t)y+tz\in B(x,\varepsilon)$. 从而 $B(x,\varepsilon)$ 是凸集． □

(二)常见错误分析

1.1.12　设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间，A 为 $\langle X,\rho\rangle$ 的子空间，$G\subset A$. 证明 G 为子空间 A 的开集 $\Leftrightarrow$ 存在 X 的开集 G^* 使 $G=G^*\cap A$.

试分析下述证明是否正确，理由何在．

"$\Rightarrow$"　因为 G 为 A 的开集，又 $G\subset A\subset X$，所以 G 是 X 的开集(或详细一点，因 G 为 A

的开集．故$\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon>0$ s. t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$，又$G\subset A\subset X$，所以$G$是$X$的开集)．于是只要取$G^*=G$就有$G=G\cap A=G^*\cap A$.

"$\Leftarrow$"　因为$G=G^*\cap A$，其中G^*是X的开集，A是子空间，所以A也是开集．故$G^*\cap A$是开集，并且$G=G^*\cap A\subset A$，从而G是A的开集．

分析　在必要性的证明中，在括号之外，把子空间A的开集与空间X的开集这两个概念混为一谈了，误认为既是"开集"(至于相对哪个空间而言，就不去理会了)又包含在X内，当然就是X的开集了。在括号内的错误则在于没有把子空间A中一点x在A内的球形邻域与x在X内的球形邻域区分开来，从而导致子空间的开集就是原空间的开集的错误结论．在充分性部分，错误在于把A在子空间A内是开集与A在X中是开集二者混为一谈了．事实上子空间中的子集S(包括$S=A$)如在子空间A内是开集，但S在X中却未必是开集．例如$[0,1)$作为E^1的子空间，依定义可验证$[0,1)$本身以及$[0,\frac{1}{2})$在子空间$[0,1)$内是开集，然而在E^1内却不是开集．

正确的证明如下：

首先在记号上，为了区分子空间A中一点x在子空间内的球形邻域与在原空间X内的球形邻域，应采用不同的记号表示，比如可分别用下述记号表示：

在子空间A中的球形邻域记为

$$B_A(x,\varepsilon)=\{y\in A\,|\,\rho(x,y)<\varepsilon\},$$

在原空间X中的球形邻域记为

$$B_X(x,\varepsilon)=\{y\in X\,|\,\rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

易见，当$x\in A$时，$B_A(x,\varepsilon)=B_X(x,\varepsilon)\cap A$.

现正式证明如下：

"$\Rightarrow$"　因G为A的开集，所以$\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon_x>0$ s. t. $B_A(x,\varepsilon_x)\subset G$. 令

$$G^*=\bigcup_{x\in G}B_X(x,\varepsilon_x),$$

则G^*是X的开集，且

$$G=\bigcup_{x\in G}B_A(x,\varepsilon_x)=\bigcup_{x\in G}(B_X(x,\varepsilon_x)\cap A)=G^*\cap A.$$

"$\Leftarrow$"　假定$G=G^*\cap A$，其中G^*是X的开集，则$\forall\ x\in G\subset G^*\ \ \exists\ \varepsilon>0$　s. t. $B_X(x,\varepsilon)\subset G^*$，于是

$$B_A(x,\varepsilon)=B_X(x,\varepsilon)\cap A\subset G^*\cap A=G,$$

所以G是A的开集．　□

这个例子告诉我们，对于概念的理解要清晰，不能含混．为了区分一些容易混淆的概念对所用的记号加上明确的标记也是必要的．不过在不会引起混淆时，也可省去一些标记(或词语)，使符号或语言简洁明快．比如，我们常将ρ-开集简称开集，球形邻域有时也写为$B(x,\varepsilon)$等，又如在上述证明中，第一部分明确用ε_x表示ε与x有关，而第二部分虽然ε同样与x有关，但没有必要去区分，因此就可省略x，只用ε表示即可，以免繁琐累赘．读者在读书或自已解题中应适当注意．

C 练习题

1.1.1 判断如下定义的映射 ρ_i：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是否为 $\mathbf{R}$ 的度量，并说明理由：$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$

$$\rho_1(x,y)=|x-y|^2,\quad \rho_2(x,y)=|x^2-y^2|,$$
$$\rho_3(x,y)=|x^3-y^3|,\quad \rho_4(x,y)=|x^{1/3}-y^{1/3}|.$$

1.1.2 设 $B=\{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\mid\forall\ n,x_n\in\mathbf{R},\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$有界$\}$，$\rho:B\times B\to\mathbf{R}$ 定义为：$\forall\ x=\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$，$y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in B$

$$\rho(x,y)=\sup\{|x_n-y_n|\,|\,n\in\mathbf{N}\}$$

证明 ρ 是 B 的度量．我们称$\langle B,\rho\rangle$为有界序列空间．

若 $C=\{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\mid\forall\ n,x_n\in\mathbf{R},\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛$\}$，则 $C\subset B$，称子空间 C 为收敛序列空间．

1.1.3 判断下列 E^2 的子集是否为开集：

$$A=\{\langle x,y\rangle\mid xy\neq 1\},\qquad B=\{\langle x,y\rangle\mid |x|<1,|y|\leqslant 1\},$$
$$C=\{\langle x,y\rangle\mid x^2+y^2>1\},\quad D=\{\langle x,y\rangle\mid y=x^2\}.$$

1.1.4 设 $S=[-1,1]$是 E^1 的子空间，判定下列集合中哪些是 S 的开集，哪些是 E^1 的开集，哪些两者都不是．

$$A=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}<|x|<1\right\},\quad B=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}<|x|\leqslant 1\right\},$$
$$C=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}<|x|<\frac{3}{2}\right\},\quad D=\left\{x\in S\,\middle|\,0<|x|\leqslant\frac{3}{2}\right\},$$
$$E=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant|x|<1\right\},\quad F=\left\{x\in S\,\middle|\,0\leqslant|x|<\frac{3}{2}\right\},$$
$$G=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 1\right\},\quad H=\left\{x\in S\,\middle|\,0<|x|<1,\text{且}\frac{1}{x}\notin\mathbf{N}\right\}.$$

1.1.5 设 X 为非空集，定义 d：$X\times X\to\mathbf{R}$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y,\end{cases}$$

易见 d 是 X 的度量，称之为离散度量，证明离散度量空间$\langle X,d\rangle$中每个子集都是开集．

1.1.6 设 A,B 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，证明

$$\rho(A,B)=\inf_{x\in A}\rho(x,B)=\inf_{y\in B}\rho(y,A).$$

1.1.7 设 A,B 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，$x,y\in X$，证明

(1) $\rho(x,A)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,A)$，

(2) $\rho(A,B)\leqslant\rho(x,A)+\rho(x,B)$.

1.1.8 设 A 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，$\varepsilon>0$，令

$$B_\rho(A,\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(y,A)<\varepsilon\},$$

证明

(1) $B_\rho(A,\varepsilon)=\bigcup_{x\in A}B_\rho(x,\varepsilon)$.

(2) 设关系 $r_\varepsilon=\{\langle x,y\rangle\in X\times X\mid\rho(x,y)<\varepsilon\}$，则 A 在 r_ε 下的值域

$$r_\varepsilon(A) \xlongequal{\text{def}} \{y \in X \mid \exists\, x \in A \text{ s.t. } \langle x,y\rangle \in r_\varepsilon\} = B_\rho(A,\varepsilon).$$

1.1.9 判断B1.1.3中 $\mathbf{R}$ 的度量 ρ_1,ρ_2，与 $\mathbf{R}$ 的通常度量即欧氏度量(记为 ρ)是否等价，若不等价，则进而判断它们诱导的拓扑是否可比较，给出证明或举反例．

§1.2 拓扑空间的基本概念

A 内容提要

1.2.1 定义 X 为非空集，$\tau\subset\mathscr{P}(X)$满足开集公理：

[0.1] $\varnothing, X\in\tau$,

[0.2] $G_1,G_2\in\tau \Rightarrow G_1\cap G_2\in\tau$,

[0.3] $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\tau \Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\tau$.

则称 τ 为 X 的拓扑，$\langle X,\tau\rangle$为拓扑空间，τ 的每个成员叫 X 的开集，开集的补集叫闭集，全体闭集组成的集族叫余拓扑．$\tau=\{\varnothing,X\}$叫平凡拓扑，$\tau=\mathscr{P}(X)$叫离散拓扑．

1.2.2 定理 拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$的余拓扑 $\sigma=\{F\subset X\mid\mathscr{C}F\in\tau\}$满足下述闭集公理：

[C.1] $\varnothing, X\in\sigma$,

[C.2] $F_1,F_2\in\sigma \Rightarrow F_1\cup F_2\in\sigma$,

[C.3] $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\sigma \Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\sigma$.

1.2.3 定义 设$\langle X,\tau\rangle$为拓扑空间，$A\subset X, x\in X$.

(1) X 的子集 U 叫做点 x 的邻域$\Leftrightarrow\exists\, G\in\tau$ s.t. $x\in G\subset U$. x 的全体邻域构成的集族叫做 x 的邻域系，记作 $\mathscr{N}(x)$或 $\mathscr{N}_X(x)$，$\mathscr{N}_\tau(x)$. $\mathscr{N}(x)\cap\tau$ 的成员叫做 x 的开邻域．

(2) x 叫做 A 的内点$\Leftrightarrow\exists\, U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $x\in U\subset A$. A 的全体内点组成的集叫做 A 的内部，记作 $\mathring{A}$ 或Int A，$\mathrm{Int}_X A$，$\mathrm{Int}_\tau A$.

(3) x 叫做 A 的接触点$\Leftrightarrow\forall\, U\in\mathscr{N}(x), U\cap A\neq\varnothing$. A 的全体接触点组成的集合叫做 A 的闭包，记作 $\bar{A}$ 或 ClA，$\mathrm{Cl}_X A$. $\mathrm{Cl}_\tau A$.

(4) x 叫做 A 的边界点$\Leftrightarrow\forall\, U\in\mathscr{N}(x)$，$U\cap A\neq\varnothing$且 $U\cap\mathscr{C}A\neq\varnothing$. A 的全体边界点组成的集合叫做 A 的边界，记成 BdA 或 $\mathrm{Bd}_X A$，$\mathrm{Bd}_\tau A$.

(5) x 叫做 A 的聚点$\Leftrightarrow\forall\, U\in\mathscr{N}(x)$，$U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$. A 的全体聚点组成的集合叫做 A 的导集，记成 A'.

易见上述(2)－(5)的陈述中，把 $U\in\mathscr{N}(x)$换成 $U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ 是等价的．

1.2.4 定理 设$\langle X,\tau\rangle$为拓扑空间，则邻域系的全体$\{\mathscr{N}(x)\mid x\in X\}$满足下述邻域公理：

[N.1] $\forall\, x\in X, \mathscr{N}(x)\neq\varnothing, \forall\, U\in\mathscr{N}(x), x\in U$.

[N.2] $U\in\mathscr{N}(x)$且 $U\subset V\Rightarrow V\in\mathscr{N}(x)$

[N.3]　$U,V\in\mathscr{N}(x)\Rightarrow U\cap V\in\mathscr{N}(x)$.

[N.4]　$\forall\ U\in\mathscr{N}(x)\ \exists\ V\subset U$ s.t. $x\in V$ 且$\forall\ y\in V$,$V\in\mathscr{N}(y)$.

1.2.5 定理　设 A,B 为 拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$的子集,则

(1)　$A\in\mathscr{N}(x)\Leftrightarrow x\in\mathring{A}$.

(2)　$A\in\tau\Leftrightarrow\forall\ x\in A$ 都有 $A\in\mathscr{N}(x)\Leftrightarrow\mathring{A}=A$.

(3)　$\mathscr{C}(\bar{A})=(\mathscr{C}A)^{\circ}$;　$\mathscr{C}(\mathring{A})=\overline{\mathscr{C}A}$.

(4)　A 为闭集$\Leftrightarrow\bar{A}=A$.

(5)　$\mathrm{Bd}A=A\cap\overline{\mathscr{C}A}$,从而 $\mathrm{Bd}A$ 为闭集.

(6)　$A=A\cup A'=A\cup\mathrm{Bd}A$.

(7)　$A\subset B\Rightarrow\bar{A}\subset\bar{B},\mathring{A}\subset\mathring{B}$.

1.2.6 定理　设$\langle X,\tau\rangle$为拓扑空间,$\forall\ A\in\mathscr{P}(X)$令

$$c(A)=\bar{A},\qquad i(A)=\mathring{A},$$

则算子 $c,i:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$分别满足下 述闭包公理[K.1]—[K.4]与内部公理[I.1]—[I.4]:$\forall\ A,B\in\mathscr{P}(X)$

[K.1]　$c(\varnothing)=\varnothing$,　　[I.1]　$i(X)=X$

[K.2]　$A\subset c(A)$,　　[I.2]　$i(A)\subset A$,

[K.3]　$c(c(A))=c(A)$,　　[I.3]　$i(i(A))=i(A)$,

[K.4]　$c(A\cup B)=c(A)\cup c(B)$;　　[I.4]　$i(A\cap B)=i(A)\cap i(B)$.

由 A1.2.5 与 A1.2.6 可知 $\bar{A}$ 是 X 中包含 A 的最小闭集,$\mathring{A}$ 是 X 中包含在 A 内的最大开集,即有

$$\bar{A}=\bigcap\{F\subset X\mid A\subset F\ \text{且}\ F\ \text{为闭集}\},\mathring{A}=\bigcup\{G\subset X\mid G\subset A\ \text{且}\ G\in\tau\}$$

1.2.7 定义　设$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$为拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$中的序列,$x\in X$.

(1)　若$\forall\ U\in\mathscr{N}(x)\ \exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\geqslant n_0$, $x_n\in U$ 则说 x 为$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的极限点,也说$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛于 x,可记作$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to x$.

(2)　若$\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$以及 $n\in\mathbf{N}\ \exists\ k>n$ s.t. $x_k\in U$,则称 x 为$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的接触点.

1.2.8 定理　拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$中序列$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to x\in X\Leftrightarrow\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的任一子序列$\langle n_{k_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}\to x$.

$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的任一子序列的接触点也是$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的接触点.极限点必为接触点.

B　例题

(一)

这一节的概念比较多,但只要抓住由开集公理所界定的开集概念,以及由开集引伸出来的点的邻域概念及邻域所具有的行为,那么本节所有的概念就一目了然了.在解题时也只要紧紧把握住开集公理和点的邻域所具有的行为就不会有太大的困难.要注意的是本节所有概念都直接与拓扑有关.

1.2.1 设在 $\mathbf{R}$ 上给出三个拓扑，τ 为通常的拓扑，即由欧氏度量诱导的拓扑，

$$\tau_1 = \{G \subset \mathbf{R} \mid 0 \in G\} \cup \{\varnothing\}, \tau_2 = \{G \subset \mathbf{R} \mid \mathscr{C}G \text{ 有限}\} \cup \{\varnothing\}.$$

试求开区间 $(0,1)$ 分别在 $\langle \mathbf{R},\tau\rangle$，$\langle \mathbf{R},\tau_1\rangle$，$\langle \mathbf{R},\tau_2\rangle$ 中的闭包．

解 (1) 在 $E^1=\langle \mathbf{R},\tau\rangle$ 中，易见 $\mathrm{Cl}_\tau(0,1)=[0,1]$.

(2) 在 τ_1 之下，$0\in\mathscr{C}(0,1)$，所以 $\mathscr{C}(0,1)$ 是开集，$(0,1)$ 就是闭集，故 $\mathrm{Cl}_{\tau_1}(0,1)=(0,1)$.

(3) 在 τ_2 之下，$\forall\ x\in\mathbf{R}$ 以及 $U\in\mathscr{N}_{\tau_2}(x)$，总有 $\mathscr{C}U$ 是有限集，而 $(0,1)$ 无限，故必有 $U\cap(0,1)\neq\varnothing$，因此 $x\in\mathrm{Cl}_{\tau_2}(0,1)$. 从而 $\mathrm{Cl}_{\tau_2}(0,1)=\mathbf{R}$ □

可见，同一个集合 $(0,1)$ 在不同拓扑下的闭包是不同的．

1.2.2 设 $\langle X,\tau\rangle$ 为任意的拓扑空间，$A\subset X$. 试问：

(1) 如果 A 是闭集，那么 $\overline{(\mathring{A})}=A$ 是否成立？

(2) 如果 A 是开集，那么 $(\overline{A})^\circ=A$ 是否成立？

解 设 $X=E^1$，$A=\left\{0,1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$，$B=\mathscr{C}A$. 则 $\overline{(\mathring{A})}=\overline{\varnothing}=\varnothing$，$(\overline{B})^\circ=\mathring{\mathbf{R}}=\mathbf{R}$. 其中 A 是闭集，B 是开集，可见 (1)，(2) 一般地来说是不成立的． □

注 从直觉的想象，一个闭集 A 的内部就是删除边界以后剩下的部分，再取闭包，又将边界添进去了，应该相等（对偶地考虑开集）．现在何以不等呢？这种直觉想象的错误在哪里呢？

事实上，$\mathring{A}=A-\mathrm{Bd}A\xlongequal{\text{def}}C$，$\overline{(\mathring{A})}=C\cup\mathrm{Bd}C$. 由此可见，我们求 $\mathring{A}$ 时，删除的是 A 的边界．再求 $\overline{(\mathring{A})}$ 时，添加进来的是 $C=A-\mathrm{Bd}A$ 的边界，也就是 $\mathring{A}$ 的边界．$C=\mathring{A}$ 是 A 的子集，两者的边界就未必相等了．

这个例子告诉我们，在解题时，一定要避免直觉的影响所造成的错误，要切忌想当然，一定要以逻辑推理为依据．

1.2.3 举例说明对拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的任意一个子集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 等式

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$$

未必成立．

解 例如在 E^1 中，记 $A_n=\left(\dfrac{1}{n},2\right)$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},2\right]=(0,2],\quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\overline{(0,2)}=[0,2].$$

两者不等． □

注 由闭包公理[K.4]，利用数学归纳法即知闭包运算是有限可加的，而上例表明对无限情形未必可加，对于可数情形可证

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_{n+i}}\right).$$

（留作习题）．对于任意的无限情形（包括可数无限），在加上所谓"局部有限"的条件后，是可加的．

1.2.4 设 $\mathscr{A}$ 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集族，如果 $\forall\ x\in X\ \exists\ U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. U 至多与 $\mathscr{A}$ 的有限个成员之交非空，则称 $\mathscr{A}$ 是局部有限的．现假定 $\mathscr{A}$ 是局部有限的，证明

$$\overline{\bigcup \mathscr{A}} = \bigcup \{\overline{A} | A \in \mathscr{A}\}.$$

证　$\bigcup\{\overline{A}|A\in\mathscr{A}\}\subset\overline{\bigcup\mathscr{A}}$　由闭包定义直接可得．现设 $x\in\overline{\bigcup\mathscr{A}}$，$\forall\, U\in\mathscr{N}(x)$，因为 $\mathscr{A}$ 局部有限．故存在 $G\in\mathscr{N}(x)$ 使 G 至多与 $\mathscr{A}$ 的有限个成员 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相交，于是

$$U\cap G\cap(\bigcup\{A|A\in\mathscr{A}-\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\})=\varnothing.$$

但 $x\in\overline{\bigcup\mathscr{A}}$，故 $U\cap G\cap(\bigcup\mathscr{A})\neq\varnothing$，从而

$$U\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\supset U\cap G\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\neq\varnothing$$

这就表明 $x\in\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\subset\bigcup\{\overline{A}|A\in\mathscr{A}\}$．所以

$$\overline{\bigcup\mathscr{A}}\subset\bigcup\{\overline{A}|A\in\mathscr{A}\}.$$

□

1.2.5　容易验证在 E^n 中任意一个开球的闭包等于这个开球与同心等半径的球面之并．那么对于一般的度量空间 $\langle X,\rho\rangle$，这个结果是否还成立？（$S(x,r)\overset{\text{def}}{=\!=}\{y\in X|\rho(x,y)=r\}$ 叫做与 $B(x,r)$ 同心等半径的球面）．

解　设 X 至少有两个不同的点，$\langle X,d\rangle$ 为离散度量空间．则 $\forall\, x\in X$

$$B(x,1)=\{x\},\qquad S(x,1)=X-\{x\}.$$

由于 $\{x\}$ 为闭集，所以 $\overline{B(x,1)}=\{x\}$，而

$$B(x,1)\cup S(x,1)=X\neq\{x\}.$$

所以在一般的度量空间中，$\overline{B(x,r)}$ 与 $B(x,r)\cup S(x,r)$ 未必相等．

□

注　一般地可以证明 $\forall\, y\in\overline{B_\rho(x,r)}$ 有 $\rho(x,y)\leqslant r$．即 $\overline{B_\rho(x,r)}\subset B_\rho(x,r)\cup S_\rho(x,r)$．这道题告诉我们欧氏空间的某些性质对一般的度量空间已不再成立，更何况对一般的拓扑空间了．以后我们将陆续看到过去在欧氏空间中某些非常熟悉的性质，在一般的拓扑空间中不再成立．所以我们既要以欧氏空间或度量空间作为拓扑空间的原型，以便对拓扑空间中的概念和性质能有直观的理解，但又不能囿于欧氏空间或度量空间，不能把欧氏空间的结果原封不动地搬到拓扑空间中来．由于我们对欧氏空间太熟悉了，往往不自觉地会受到习惯势力的影响，对于初学者来说应力求避免这种影响．

1.2.6（杨忠道定理）　证明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的任一子集 A 的导集是闭集的充要条件为 X 的每个单点集的导集是闭集．

证　必要性显然．现证明充分性．任取 $x\in\overline{A'}$，由于 $\overline{A'}\subset(\overline{\overline{A}})=\overline{A}=A\cup A'$．故 $x\in A\cup A'$．若 $x\notin A$，则 $x\in A'$，若 $x\in A$ 我们仍然可证 $x\in A'$．

由于 $\{x\}'$ 为闭集，故 $G\overset{\text{def}}{=\!=}\mathscr{C}(\{x\}')\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$．$\forall\, U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$，$V\overset{\text{def}}{=\!=}U\cap G\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$．由于 $x\in\overline{A'}$，故 $V\cap A'\neq\varnothing$．取 $y\in V\cap A'$，则 $y\in V\subset U$ 且 $y\in A'$．于是 $U\cap(A-\{y\})\neq\varnothing$，再分两种情况来考虑：

（1）　$y=x$，则已有 $x=y\in A'$．

（2）　$y\neq x$，令 $W=\mathscr{C}(\overline{\{x\}})$．由于 $y\in V\subset G-\mathscr{C}(\{x\}')$，故 $y\notin\{x\}\cup\{x\}'=\overline{\{x\}}$．于是 $W\in\mathscr{N}(y)\cap\tau$，且 $(U\cap W)\cap(A-\{y\})\neq\varnothing$，而 $x\notin W$，故

$$\begin{aligned}U\cap(A-\{x\})&\supset U\cap W\cap(A-\{x\})=U\cap W\cap A\\&\supset U\cap W\cap(A-\{y\})\neq\varnothing.\end{aligned}$$

从而 $x\in A'$．这就证明了 $\overline{A'}\subset A'$，故 A' 为闭集．

□

注 A'不是闭集的例子：设 $X=\{1,2,3\}$，$\tau=\{\varnothing,X,\{1\},\{2,3\}\}$．$A=\{1,2\}$，则 $A'=\{3\}$不是闭集．事实上$\{2\}'=\{3\}$也非闭．

对于度量空间，容易验证每个单点集$\{x\}$的导集$\{x\}'=\varnothing$．所以度量空间的每个子集的导集是闭集．

1.2.7（Kuratowski 14 集定理） (1)证明在任意拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$中，从一个给定的子集 A 出发，仅用取补与取闭包两种运算至多可得 14 个不同的子集．

(2) 试在 E^1 中给出一个子集 A，使经上述运算恰能得到 14 个不同的子集．

解 为了方便，我们用 A^c，A^- 分别表示 A 的补集与闭包．

(1) 因为对任意的 $A\subset X$，均有$\mathring{A}=A^{c-c}$，所以如果 A 是开集的闭包，则 $A=A^{\circ-}=A^{c-c-}$．(因为可设 $A=\overline{G}$，$G\in\tau$．一方面 $A^{\circ-}\subset A^{-}=A$；另一方面，由 $G\subset\overline{G}=A$，得 $G=G^{\circ}\subset A^{\circ}$，于是 $A=\overline{G}=G^{\circ-}\subset A^{\circ-}$，从而 $A=A^{\circ-}$．)

1° 对 A 先取补再取闭包，至多有下列 7 个不同的子集：A^c，A^{c-}，A^{c-c}，A^{c-c-}，A^{c-c-c}，A^{c-c-c-}，$A^{c-c-c-c}$．

这是因为 A^{c-} 是闭集，A^{c-c}是开集．于是 A^{c-c-}是开集的闭包．所以 $A^{c-c-c-c-}=A^{c-c-}$ 就重复出现了．

2° 对 A 先取闭包再取补，至多有下列 6 个不同的子集：A^-，A^{-c}，A^{-c-}，A^{-c-c}，A^{-c-c-}，A^{-c-c-c}．

这是因为 A^{-c-} 是开集的闭包，所以 $A^{-c-}=A^{-c-c-c-}$．

3° 如果对 A 连续取闭包或连续取补，则有 $A^{--}=A^-$，$A^{cc}=A$ 均重复已有的子集．所以 1°的 7 个加 2°的 6 个，连同 A 本身至多 14 个．

(2) 在 E^1 中令

$$A=\left((0,1]-\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbf{N}\right\}\right)\cup([1,2]\cap\mathbf{Q})$$

$$\cup((4,5]\cap\mathbf{Q})\cup\left\{2+\frac{n}{n+1}\,\middle|\,n\in\mathbf{N}\right\}$$

就能恰好得到 14 个不同的子集，读者可自行验证． □

1.2.8 设 A,B 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，证明：

(1) $\rho(\overline{A},\overline{B})=\rho(A,B)$．

(2) $\delta(\overline{A})=\delta(A)$．

证 (1) $\rho(\overline{A},\overline{B})\leqslant\rho(A,B)$是显然的，只需证明 $\rho(A,B)\leqslant\rho(\overline{A},\overline{B})$．

$\forall\, n\in\mathbf{N}\ \exists\ x_1\in\overline{A}$ 及 $y_1\in\overline{B}$ s.t.

$$\rho(x_1,y_1)<\rho(\overline{A},\overline{B})+\frac{1}{3n}.$$

又对 x_1,y_1,n，$\exists\ x\in A$ 及 $y\in B$ s.t.

$$\rho(x,x_1)<\frac{1}{3n},\qquad\rho(y_1,y)<\frac{1}{3n},$$

故

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_1)+\rho(x_1,y_1)+\rho(y_1,y)<\rho(A,B)+\frac{1}{n}.$$

所以

$$\rho(A,B) \leqslant \rho(x,y) < \rho(\overline{A},\overline{B}) + \frac{1}{n}.$$

让 $n\to\infty$ 取极限即得 $\rho(A,B)\leqslant\rho(\overline{A},\overline{B})$.

(2) 只需证 $\delta(\overline{A})\leqslant\delta(A)$. $\forall\ x,y\in\bar{A}$ 及 $n\in\mathbf{N}\ \exists\ x_1,y_1\in A$ s. t.

$$\rho(x,x_1) < \frac{1}{2n}, \qquad \rho(y,y_1) < \frac{1}{2n}.$$

所以

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,x_1) + \rho(x_1,y_1) + \rho(y_1,y) < \delta(A) + \frac{1}{n}.$$

让 $n\to\infty$ 取极限即得 $\rho(x,y)\leqslant\delta(A)$. 故 $\delta(\overline{A})\leqslant\delta(A)$

从而

$$\delta(\overline{A}) = \delta(A). \qquad \square$$

1.2.9 设 A,B 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集,证明:

(1) $\mathrm{Bd}\overline{A}\subset\mathrm{Bd}A$.

(2) $\mathrm{Bd}\,\mathring{A}\subset\mathrm{Bd}A$.

(3) $\mathrm{Bd}(A\cup B)\subset(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B)$.

(4) $\mathrm{Bd}(A\cap B)\subset(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B)$.

并给出上述各式中真包含的例子.

证 (1) $\mathrm{Bd}\overline{A}=\overline{(\overline{A})}\cap\overline{\mathscr{C}\overline{A}}\subset\overline{A}\cap\overline{\mathscr{C}A}=\mathrm{Bd}A$.

设 $X=E^1$, $A=(-1,0)\cup(0,1)$. 则 $\mathrm{Bd}\overline{A}=\{-1,1\}$,而 $\mathrm{Bd}A=\{-1,0,1\}$. 故 $\mathrm{Bd}\bar{A}\subset\mathrm{Bd}A$ 且 $\mathrm{Bd}\bar{A}\neq\mathrm{Bd}A$.

(2),(3)的证明与(1)类似. 真包含的例子为:

设 $X=E^1$, $A=(-1,1)\cup\{2\}$. 则 $\mathrm{Bd}\,\mathring{A}=\{-1,1\}$,而 $\mathrm{Bd}A=\{-1,1,2\}$. 故 $\mathrm{Bd}\,\mathring{A}\subset\mathrm{Bd}A$ 且 $\mathrm{Bd}\,\mathring{A}\neq\mathrm{Bd}A$.

又设 $X=E^1$, $A=(-1,0]$, $B=(0,1)$,则

$$\mathrm{Bd}(A\cup B)=\{-1,1\}, \qquad \mathrm{Bd}A=\{-1,0\}, \qquad \mathrm{Bd}B=\{0,1\}.$$

此时 $\mathrm{Bd}(A\cup B)\subset(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B)$ 且 $\mathrm{Bd}(A\cup B)\neq(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B)$.

(4)

$$\begin{aligned}
&x \notin (\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B) \Rightarrow x\notin \mathrm{Bd}A \text{ 且 } x\notin\mathrm{Bd}B\\
&\Rightarrow \exists\, U\in\mathscr{N}(x)\ \text{s.t.}\ U\cap A=\varnothing \text{ 或 } U\cap\mathscr{C}A=\varnothing, \text{且}\\
&\quad \exists\, V\in\mathscr{N}(x)\ \text{s.t.}\ V\cap B=\varnothing \text{ 或 } V\cap\mathscr{C}B=\varnothing.
\end{aligned}$$

于是有下述 4 种情况:

1° $U\cap A=\varnothing$ 且 $V\cap B=\varnothing$,

2° $U\cap A=\varnothing$ 且 $V\cap\mathscr{C}B=\varnothing$,

3° $U\cap\mathscr{C}A=\varnothing$ 且 $V\cap B=\varnothing$,

4° $U\cap\mathscr{C}A=\varnothing$ 且 $V\cap\mathscr{C}B=\varnothing$.

而 1°, 2°, 3°的每一种都可推出 $(U\cap V)\cap(A\cap B)=\varnothing$, 4°则推出 $(U\cap V)\cap$

$((\mathscr{C}A)\cup(\mathscr{C}B))=\varnothing$.

这就表明 $\exists\ W=U\cap V\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $W\cap(A\cap B)=\varnothing$ 或 $W\cap(\mathscr{C}(A\cap B))=\varnothing$，所以 $x\notin \mathrm{Bd}(A\cap B)$. 从而 $\mathrm{Bd}(A\cap B)\subset(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B)$. 真包含的例子同上述(3)的例子.

□

1.2.10 如果拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集 A,B 满足条件：$\overline{A}\cap B=\varnothing=A\cap\overline{B}$，则称 A,B 是相互隔离的. 证明：如果 A,B 是相互隔离的，则上题中的(3)等号成立，即

$$\mathrm{Bd}(A\cup B)=(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B).$$

证 由上题(3)的结果，我们只需证

$$(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B)\subset\mathrm{Bd}(A\cup B).$$

设 $x\in\mathrm{Bd}A$，则 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$，$U\cap A\neq\varnothing$，当然有 $U\cap(A\cup B)\neq\varnothing$，下面要证 $U\cap\mathscr{C}(A\cup B)\neq\varnothing$.

假定 $\exists\ U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $U\cap(\mathscr{C}(A\cup B))=\varnothing$. 则 $\forall\ V\in\mathscr{N}(x)$，

$$(U\cap V)\cap\mathscr{C}(A\cup B)\subset U\cap\mathscr{C}(A\cup B)=\varnothing,$$

即 $U\cap V\cap\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}B=\varnothing$，故 $U\cap V\cap\mathscr{C}A\subset B$.

由于 $x\in\mathrm{Bd}A$，所以 $U\cap V\cap\mathscr{C}A\neq\varnothing$. 于是 $\exists\ y\in U\cap V\cap\mathscr{C}A\subset B$. 从而 $V\cap B\neq\varnothing$，即得 $x\in\overline{B}$.

由于 $A\cap\overline{B}=\varnothing$，所以 $x\in\mathscr{C}A$. 又因 $x\in\mathrm{Bd}A\subset\overline{A}\subset\mathscr{C}B$，所以又有 $x\in\mathscr{C}B$. 故得

$$x\in(\mathscr{C}A)\cap(\mathscr{C}B)=\mathscr{C}(A\cup B),$$

这与 $U\cap\mathscr{C}(A\cup B)=\varnothing$ 矛盾. 至此证明了 $x\in\mathrm{Bd}(A\cup B)$. 因此 $\mathrm{Bd}A\subset\mathrm{Bd}(A\cup B)$. 同理可证 $\mathrm{Bd}B\subset\mathrm{Bd}(A\cup B)$. 所以 $(\mathrm{Bd}A)\cup(\mathrm{Bd}B)\subset\mathrm{Bd}(A\cup B)$. □

1.2.11 设 X 为非空集，$\tau=\{G\subset X\mid\mathscr{C}G$ 有限$\}\cup\{\varnothing\}$，$\tau^*=\{G\subset X\mid\mathscr{C}G$ 可数$\}\cup\{\varnothing\}$，易见 τ,τ^* 都是 X 的拓扑. 分别叫做 X 的有限补拓扑与可数补拓扑. 证明：在可数补拓扑空间 $\langle X,\tau^*\rangle$ 中序列 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to x$ 的充要条件是 $\exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\geqslant n_0, x_n=x$.

证： 只需证必要性. 假定 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to x$，取

$$U=\mathscr{C}\{x_n\mid n\in\mathbf{N},x_n\neq x\}$$

则 U 为包含 x 的开集，故 U 是 x 的邻域. 于是 $\exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\geqslant n_0, x_n\in U$. 据 U 的定义必有 $\forall\ n\geqslant n_0, x_n=x$. □

1.2.12 定义：在拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中，一个子集 A 如果能表示成可数个开集的交，则称 A 为 G_δ 集，如果能表示成可数个闭集的并，则称之为 F_σ 集. 证明：

(1) 度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 的每个闭集是 G_δ 集，每个开集是 F_σ 集.

(2) 在可数补空间 $\langle X,\tau^*\rangle$ 中，每个 F_σ 集都是闭集，每个 G_δ 集都是开集.

(3) 在有限补拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中，所有 G_δ 集组成之族恰好是同一集 X 上的可数补拓扑 τ^*.

证 (1) 设 F 为 $\langle X,\rho\rangle$ 的闭集，$\forall\ n\in\mathbf{N}$ 令

$$G_n=\{x\in X\mid\rho(x,F)<\frac{1}{n}\}$$

则 G_n 是 X 的开集(见 B1.1.6)且 $F=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}G_n$.

事实上，$F\subset\bigcap_{n\in\mathbf{N}}G_n$ 是显然的．又若 $x\in\bigcap_{n\in\mathbf{N}}G_n$，则 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\rho(x,F)<\frac{1}{n}$，于是 $\exists\ x_n\in F$ s. t. $\rho(x,x_n)<\frac{1}{n}$.

现 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau\ \exists\ \varepsilon>0$ s. t. $B(x,\varepsilon)\subset U$，对上述 ε，取 $n\in\mathbf{N}$ s. t. $\frac{1}{n}<\varepsilon$，则由上述 $\exists\ x_n\in F$ s. t. $x_n\in B(x,\frac{1}{n})\subset B(x,\varepsilon)\subset U$. 即 $U\cap F\neq\varnothing$，所以 $x\in\bar{F}=F$. 于是 $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}G_n\subset F$，从而 $F=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}G_n$. 这就证明了 F 是 G_δ 集。

类似地可证开集是 F_σ 集．通过取补利用上述结果也同样可得结论．

（2） 设 F 是可数补空间 $\langle X,\tau^*\rangle$ 的 F_σ 集，则存在可数闭集族 $\{C_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 使 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$.

由 τ^* 的定义可设，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，C_n 是可数集（否则 $\exists\ C_n$ 不可数，必有 $C_n=X$，则 $F=X$ 已为闭集），从而 F 也可数，所以 F 是闭集．

通过取补利用上述结果，即得 G_δ 集是开集．

（3） 如果 G 为有限补拓扑空间的 G_δ 集，则存在开集的可数族 $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 使 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. 由有限补拓扑的定义，可设 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\mathscr{C}U_n$ 是有限集（否则 $\exists\ n$ s. t. $\mathscr{C}U_n$ 无限，必有 $\mathscr{C}U_n=X$，即 $U_n=\varnothing$，于是 $G=\varnothing\in\tau^*$），所以 $\mathscr{C}G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}U_n$ 是可数集，因此 $G\in\tau^*$.

反之，若 $G\in\tau^*$，不妨假定 $G\neq\varnothing$，则 $\mathscr{C}G$ 可数，设 $\mathscr{C}G=\{x_n|n\in\mathbf{N}\}$，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，令 $U_n=\mathscr{C}\{x_n\}$，则 $U_n\in\tau$，且 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. 所以 G 是 $\langle X,\tau\rangle$ 中的 G_δ 集． □

我们容易证明在 E^n 中一个序列 $\langle x^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x$（其中 $x^k=\langle x_1^k,\cdots,x_n^k\rangle$，$x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$）的充要条件是 $\forall\ i=1,2,\cdots,n$ 都有 $\langle x_i^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x_i$. 也就是说在 E^n 中序列收敛等价于按坐标收敛．这个结果以后还将推广到积空间中去．下面我们证明对于 Fréchet 空间也具有这个性质，但 Hilbert 空间却不然．

1.2.13 设在 $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}=\{\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}|\forall\ i,x_i\in\mathbf{R}\}$ 上定义度量 $\rho_F:\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\times\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\to\mathbf{R}$ 为 $\forall\ x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$，$y=\langle y_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

$$\rho_F(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\left(\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\right).$$

容易验证 ρ_F 满足度量公理．称 $\langle\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\rho_F\rangle$ 为 Fréchet 空间．证明在此空间中，序列 $\langle x^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x$ 的充要条件是 $\forall\ i\in\mathbf{N}$，$\langle x_i^k\rangle_k\to x_i$.

其中 $\forall\ k$，$x^k=\langle x_i^k\rangle_{i\in\mathbf{N}}$，$x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$.

证 必要性．$\forall\ i\in\mathbf{N}$，及 $\varepsilon>0$，取 δ 使 $0<\delta<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}$. 由 $\langle x^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x$ 知 $\exists\ k_0\in\mathbf{N}$ s. t. $\forall\ k\geqslant k_0$，$\rho_F(x,x^k)<2^{-i}\delta$，所以

$$2^{-i}\left(\frac{|x_i-x_i^k|}{1+|x_i-x_i^k|}\right)\leqslant\rho_F(x,x^k)<2^{-i}\delta,$$

$$|x_i-x_i^k|<(1+|x_i-x_i^k|)\delta.$$

因 $0<\delta<\min\{1,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\}$，故有

$$|x_i - x_i^k| < \delta/(1-\delta) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big/\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) = \varepsilon$$

所以

$$\langle x_i^k \rangle_{k\in\mathbf{N}} \to x_i.$$

充分性． $\forall\ \varepsilon>0$,选取 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

因$\forall\ i=1,2,\cdots,n$, $\langle x_i^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x_i$,故$\exists\ k_i\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ k\geqslant k_i$, $|x_i^k - x_i| < \frac{\varepsilon}{2n}$.

于是$\forall\ k\geqslant\max\{k_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$有

$$\begin{aligned}\rho_F(x^k,x) &= \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\left(\frac{|x_i^k - x_i|}{1+|x_i^k - x_i|}\right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i}\left(\frac{|x_i^k - x_i|}{1+|x_i^k - x_i|}\right)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i^k - x_i| + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i}\\ &< n\left(\frac{\varepsilon}{2n}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\langle x^k\rangle_{k\in\mathbf{N}} \to x.$$

□

1.2.14 设 $H=\left\{\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty\right\}$. $\forall\ x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}, y=\langle y_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in H$ 令

$$\rho_H(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

则易证 $\rho_H: H\times H\to\mathbf{R}$ 是 H 的度量,$\langle H,\rho_H\rangle$叫做 Hilbert 空间．证明:如果$\langle H,\rho_H\rangle$中的序列$\langle x^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x$,那么$\forall\ i\in\mathbf{N}$, $\langle x_i^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x_i$(其中 $x^k=\langle x_i^k\rangle_{i\in\mathbf{N}}$, $x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$). 反之不然．

证　因为$\forall\ i\in\mathbf{N}$, $|x_i^k - x_i|\leqslant\rho_H(x^k,x)$. 所以当$\langle x^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x$ 时,显然有$\langle x_i^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to x_i$($\forall\ i\in\mathbf{N}$).

反过来,$\forall\ k\in\mathbf{N}$,取 $x^k=\langle x_i^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$如下:

$$x_i^k = \begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

显然$\forall\ i\in\mathbf{N}$, $\langle x_i^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$中,当 $k>i$ 时,$x_i^k=0$. 所以$\langle x_i^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}\to O=\langle 0,0,\cdots\rangle$. 但$\forall\ k\in\mathbf{N}$ 都有 $\rho_H(x^k,O)=1$,所以$\langle x^k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$决不会收敛到 O. □

注　尽管在$\langle H,\rho_H\rangle$中,序列收敛与按坐标收敛是不等价的．按坐标收敛只是序列收敛的必要条件．但限制在$\langle H,\rho_H\rangle$的下述子空间(叫做 Hilbert 方体)

$$H_C = \{\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in H\,|\,\forall\ i\in\mathbf{N}\ 0\leqslant x_i\leqslant\frac{1}{i}\}$$

中,那么 H_C 中的序列收敛等价于的按坐标收敛(见练习 C1.2.14,也见 B6.1.5 的注).

(二)　常见错误分析

1.2.15　试分析下述关于闭包的任意可加性

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$$

的证明错在何处：

首先易见

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}\subset\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}.$$

现设 $x\in\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$，则 $\forall\ U\in\mathcal{N}(x)$，$U\cap(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\neq\varnothing$. 所以 $\exists\ \lambda_0\in\Lambda$ s. t. $U\cap A_\lambda\neq\varnothing$，于是 $x\in\overline{A_{\lambda_0}}\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$. 即也有 $\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$.

分析　由 B 1.2.3 可知闭包运算不具有可数可加性，更不具有任意可加性了．由 B1．2.4 可知在加上"$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$局部有限的"条件后具有可加性．上面的证明是在未加任何条件的情况下给出的．因此确信这个证明是错误的．但粗看起来似乎也是正确的．那么到底错在何处呢？让我们认真地仔细地对照关于集合接触点定义中的条件：

$x\in\overline{A_{\lambda_0}}$，必须要求对于"固定的子集 A_{λ_0}"有

$$\text{“}\forall\ U\in\mathcal{N}(x),U\cap A_{\lambda_0}\neq\varnothing\text{”}.$$

但在上述证明中，λ_0 是与 U 有关的，对于不同的 U，一般地有不同的 λ_0 使 $U\cap A_{\lambda_0}\neq\varnothing$. 而未能证明有一个固定的 A_{λ_0} 使 $\forall\ U\in\mathcal{N}(x)$ 都有 $U\cap A_{\lambda_0}\neq\varnothing$，所以由此断定 $x\in\overline{A_{\lambda_0}}$ 是错误的．

□

1.2.16　设在拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中，A 为开集且 $A\subset\overline{B}$，证明 $\overline{A}=\overline{A\cap B}$. 对这一命题下述三种证明都有错误，试分析其错误所在．

［法一］　由于 $A\cap B\subset A$，所以 $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}$. 再设 $x\in\overline{A}$，则 $\forall\ U\in\mathcal{N}(x)$，$U\cap A\neq\varnothing$，又 $A\subset\overline{B}$，故 $x\in\overline{A}\subset\overline{B}$，从而也有 $U\cap B\neq\varnothing$，因此 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$，所以 $x\in\overline{A\cap B}$，于是 $\overline{A}\subset\overline{A\cap B}$，从而 $\overline{A}=\overline{A\cap B}$.

［法二］　设 $x\in\overline{A}$，则 $\forall\ U\in\mathcal{N}(x)\cap\tau$ 因 $A\in\tau$ 有 $U\cap A\in\tau$，而 $x\in\overline{A}\subset\overline{B}$，所以 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$，于是 $x\in\overline{A\cap B}$.

［法三］　设 $x\in\overline{A}$ 则 $\forall\ U\in\mathcal{N}(x)$，$U\cap A\neq\varnothing$，故 $\exists\ y\in U\cap A\subset\overline{B}$，于是 $U\cap A\in\mathcal{N}(y)$，从而 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$，故有 $x\in\overline{A\cap B}$.

分析　［法一］中，根本没有用到 $A\in\tau$ 这个条件．但当 $A\notin\tau$ 时，结论不真．例如：$X=E^1$，$A=\{\sqrt{2}\}$，$B=\mathbf{Q}$. 显然有 $A\subset E^1=\overline{\mathbf{Q}}=\overline{B}$，$\overline{A}=\{\sqrt{2}\}$，而 $\overline{A\cap B}=\overline{\varnothing}=\varnothing$，所以 $\overline{A}\neq\overline{A\cap B}$. 由此可以断定［法一］是错误的．仔细检查即可发现仅由 $U\cap A\neq\varnothing$ 与 $U\cap B\neq\varnothing$ 就得 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$ 是错误的．

［法二］中，虽已指出 $U\cap A\in\tau$，但接着由 $x\in\overline{B}$ 得出 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$ 是不充分的．因为 $U\cap A$ 是否为 x 的邻域不得而知．在题中根本没有假设 A 也是闭集，故不能排斥 $x\in\overline{A}-A$，对于这样的 x，$U\cap A$ 就肯定不是 x 的邻域了，所以不能由 $U\cap A\in\tau$ 以及 $x\in\overline{B}$ 断言 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$.

由上一段的分析可知要得 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$ 就得考虑 $U\cap A$ 是否为 $\overline{B}$ 中某点的邻域．［法三］中虽已指出 $\exists\ y\in U\cap A\subset\overline{B}$，但由此断定 $U\cap A\in\mathcal{N}(y)$ 还不充分．按本书关于邻域的定义，U 不必为开集，故 $U\cap A$ 不必为 y 的邻域，这个错误是很容易更正的．只要改"$\forall\ U\in\mathcal{N}(x)$"为"$\forall\ U\in\mathcal{N}(x)\cap\tau$"或改"$U\cap A\neq\varnothing$"为"$\mathring{U}\cap A\neq\varnothing$"就成为正确的证明了．

本题还有一种简明的证明如下：

设 $x\in A$，则 $\forall\ U\in\mathcal{N}(x)$，由 $A\in\tau$ 知 $U\cap A\in\mathcal{N}(x)$. 而 $x\in A\subset\overline{B}$，故有 $U\cap A\cap B\neq\varnothing$

即得 $x\in\overline{A\cap B}$. 于是 $A\subset\overline{A\cap B}$,从而 $\overline{A}\subset\overline{A\cap B}$. □

1.2.17 设 A,B 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集,证明

$$(A\cup B)'=A'\cup B'$$

易见 $A'\cup B'\subset(A\cup B)'$. 下证 $(A\cup B)'\subset A'\cup B'$.

设 $x\in(A\cup B)'$,则 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$ 有 $U\cap((A\cup B)-\{x\})\neq\varnothing$.

即

$$(U-\{x\})\cap(A\cup B)\neq\varnothing.$$

所以

$$(U-\{x\})\cap A\neq\varnothing,\text{或}\ (U-\{x\})\cap B\neq\varnothing.$$

由 $(U-\{x\})\cap A\neq\varnothing$,得 $x\in A'$,由 $(U-\{x\})\cap B\neq\varnothing$ 得 $x\in B'$. 所以,$x\in A'\cup B'$.

试指出上述证明的错误之处.

分析 "$\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$ 有 $(U-\{x\})\cap A\neq\varnothing$ 或 $(U-\{x\})\cap B\neq\varnothing$"意指对任意给定的 U,在"$(U-\{x\})\cap A\neq\varnothing$"与"$(U-\{x\})\cap B\neq\varnothing$"中总有一个成立. 到底哪一种情况成立,这依赖于 U,对一个特定的 U_1 可能是 $(U_1-\{x\})\cap A\neq\varnothing$,而对另一特定的 U_2,可能是 $(U_2-\{x\})\cap B\neq\varnothing$",这当然不等于"$\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$ 有 $(U-\{x\})\cap A\neq\varnothing$"与"$\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$ 有 $(U-\{x\})\cap B\neq\varnothing$"总有一个成立. 因为后者的两种情况,无论哪一种成立都要求"对所有的"U 成立,前者却不然,在 A 与 B 中固定一个比如 A,不能断定对所有的 U 有 $(U-\{x\})\cap A\neq\varnothing$ 成立. 所以也就不能断定 $x\in A'$ 或 $x\in B'$ 总有一个成立. 这个错误实质上与 B1.2.15 的错误是一样的,只不过这里的结论本来就是正确的. 所以更迷惑人.

正确的证明如下:

设 $x\notin A'\cup B'$ 则 $x\notin A'$ 且 $x\notin B'$. 于是 $\exists\ U,V\in\mathscr{N}(x)$ s.t.

$$(U-\{x\})\cap A=\varnothing\quad\text{且}\ (V-\{x\})\cap B=\varnothing.$$

从而对于 $W=U\cap V\in\mathscr{N}(x)$ 有 $(W-\{x\})\cap(A\cup B)=\varnothing$,故 $x\notin(A\cup B)'$,这就证明了 $(A\cup B)'\subset A'\cup B'$ □

C 练习题

1.2.1 设在 $\mathbf{N}$ 上有两个拓扑

$\tau_1=\{\{1,2,\cdots,n\}\mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{\varnothing,\mathbf{N}\}$, $\tau_2=\{\{n,n+1,n+2,\cdots\}\mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{\varnothing\}$.

试求单点集 $\{n\}$ 在 $\langle\mathbf{N},\tau_1\rangle$ 与 $\langle\mathbf{N},\tau_2\rangle$ 中的导集.

1.2.2 设 x,y 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中的点,证明:

$$\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}\Leftrightarrow\mathscr{N}(x)=\mathscr{N}(y)$$

1.2.3 设 G 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的开集,F 为闭集,证明 $G-F$ 为开集,$F-G$ 为闭集.

1.2.4 设 A 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的闭集,B 为 X 的任一子集,证明:

$$B\cap(\mathrm{Bd}A)\subset\mathrm{Bd}(A\cap B).$$

并举例说明如果 A 不是闭集,上述关系不必成立.

1.2.5 设 G 为拓空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的开集,$A\subset X$,证明:

(1) $G\cap A'\subset(G\cap A)'$,

(2) $G\cap\bar{A}\subset\overline{A\cap G}$，从而 $\overline{G\cap\bar{A}}=\overline{G\cap A}$.

1.2.6 设 A,B 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集且 $A'\subset B\subset A$，则 B 为闭集.

1.2.7 设 A 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集，证明：

$$x\in A-A'\Leftrightarrow\exists\, G\in\tau \text{ s.t. } G\cap A=\{x\}.$$

($A-A'$ 中的点 x 叫做 A 的孤立点.)

1.2.8 设 τ_1,τ_2 是非空集 X 的两个拓扑且 $\tau_1\subset\tau_2$，$A\subset X$. 证明：

$$\mathrm{Cl}_{\tau_2}A\subset\mathrm{Cl}_{\tau_1}A,\qquad \mathrm{Int}_{\tau_1}A\subset\mathrm{Int}_{\tau_2}A.$$

1.2.9 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集族，证明：

(1) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}\subset\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$，　　$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathring{A}_\lambda\supset(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^\circ$；

(2) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}\supset\overline{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$，　　$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathring{A}_\lambda\subset(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_{\tau\lambda})^\circ$；

1.2.10 设 A,B 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集，证明：

$$\bar{A}-\bar{B}\subset\overline{A-\bar{B}}\subset\overline{A-B},$$

并给出真包含的例子.

1.2.11 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集的可数族，证明：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n})\cup(\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{i=0}^{\infty}A_{n+i}})$$

1.2.12 试利用 公式 A1.2.5(3)写出与上题对偶的关于内部运算的结果.

1.2.13 设 $\mathscr{A}$ 是拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的局部有限的子集族，证明：

(1) $\mathscr{A}^*\overset{\text{def}}{=\!=}\{A'\mid A\in\mathscr{A}\}$ 以及 $\widetilde{\mathscr{A}}\overset{\text{def}}{=\!=}\{\bar{A}\mid A\in\mathscr{A}\}$ 也局部有限.

(2) $(\bigcup\mathscr{A})'=\bigcup\{A'\mid A\in\mathscr{A}\}$.

1.2.14 证明 H_C(B1.2.14)中的序列收敛等价于按坐标收敛.

§1.3 拓扑基与可数性公理

A 内容提要

1.3.1 定义 拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集族 $\mathscr{B}$ 如果满足条件：$\mathscr{B}\subset\tau$ 且 $\forall\, G\in\tau$ 以及 $x\in G$ $\exists\, B\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in B\subset G$，则称 $\mathscr{B}$ 为拓扑 τ 的(或空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的)一个基. 如果 $\langle X,\tau\rangle$ 存在一个可数的基，则称 $\langle X,\tau\rangle$ 是第二可数的.

1.3.2 定义 设 $\langle X,\tau\rangle$ 为拓扑空间，$x\in X$，$\mathscr{B}(x)\subset\mathscr{N}(x)$，如果 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$ $\exists\ B\in\mathscr{B}(x)$ s.t. $B\subset U$，则称 $\mathscr{B}(x)$ 为点 x 的邻域基. 如果 $\mathscr{B}(x)\subset\tau$ 则称开邻域基. 如果 $\forall\ x\in X$ 都有可数的邻域基，则说 $\langle X,\tau\rangle$ 是第一可数的.

易见度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 的全体开球 $\{B(x,\varepsilon)\mid x\in X,\varepsilon>0\}$ 是 ρ 诱导拓扑的一个基，$\forall\ x\in X$，$\{B(x,\varepsilon)\mid\varepsilon>0\}$ 就是点 x 的(开)邻域基，E^n 是第二可数的，度量空间总是第一可数的，第

二可数的空间$\langle X,\tau\rangle$必是第一可数的．

1.3.3 定理　拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$是第一可数的$\Leftrightarrow\forall\ x\in X$存在可数的开邻域基$\mathscr{U}(x)=\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$使$\forall\ n\in\mathbf{N},U_{n+1}\subset U_n$(称之为渐缩的).

1.3.4 定理　设$\langle X,\tau\rangle$是第一可数的拓扑空间,$A\subset X$,则

(1)　$x\in\bar{A}\Leftrightarrow$存在$A$中的序列$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to x$.

(2)　A为闭集$\Leftrightarrow A$的每个收敛序列的极限属于A.

(3)　x为X中序列$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的接触点$\Leftrightarrow$存在子序列$\langle x_{n_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}\to x$.

1.3.5 定义　如果拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$的每个开覆盖$\mathscr{G}$(即$\mathscr{G}\subset\tau$且$\bigcup\mathscr{G}=X$)都有可数的子覆盖$\mathscr{U}$(即可数族$\mathscr{U}\subset\mathscr{G}$且$\bigcup\mathscr{U}=X$)则称$\langle X,\tau\rangle$是Lindelöf的;如果有一可数子集$A$在$X$中稠密(即$\bar{A}=X$),则称$\langle X,\tau\rangle$是可分的．

1.3.6　定理　(1)拓扑空间(X,τ)是Lindelöf的$\Leftrightarrow$对于由拓扑基$\mathscr{B}$的成员组成的开覆盖总有可数子覆盖．

(2)　第二可数的拓扑空间总是可分的,Lindelöf的．对于度量空间,第二可数$\Leftrightarrow$可分$\Leftrightarrow$Linelöf的.

B　例题

拓扑基是一部分开集,这部分开集可视为"基本"的开集．其它任何一个开集都是一些"基本"开集的并．相应的对于一点的邻域系$\mathscr{N}(x)$,其中也有一些"基本"的邻域组成的邻域基,其它的邻域总包含某个"基本"邻域．

因此凡是用开集描述的性质都能改用拓扑基的元来描述,凡是用邻域的行为来刻划的概念也都能改用邻域基中元的行为来刻划．读者应善于利用拓扑基与邻域基解题的技巧．正如数学分析中用ε-邻域而不是用任意邻域解题一样．

1.3.1　设X为非空集(至少含有两点),$p\in X,\tau=\{G\subset X\mid p\in G\}\cup\{\varnothing\}$是$X$的拓扑,称之为特殊点拓扑．

(1)　判断下述$\mathscr{B}_i$是否为τ的基,为什么?

$$\mathscr{B}_1=\{\{p,x\}\mid x\in X-\{p\}\},\qquad \mathscr{B}_2=\{\{x\}\mid x\in X\},$$

$$\mathscr{B}_3=\{\{p,x\}\mid x\in X\},\qquad \mathscr{B}_4=\{G\subset X\mid p\in G\}.$$

(2)　设$A\subset X$,试求A'与$\mathring{A}$.

解　(1)　$\mathscr{B}_1$不是τ的基,因为开集$\{p\}$不是$\mathscr{B}_1$中一些元的并．$\mathscr{B}_2$也不是τ的基,尽管每个非空开集都是$\mathscr{B}_2$中一些元的并,但$x\neq p$时,$\{x\}\in\mathscr{B}_2$,而$\{x\}\notin\tau$. 即$\mathscr{B}_2$中含有不是开集的元．$\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4$是$\tau$的基,因为它们符合定义的条件．可见同一个拓扑$\tau$的基不是唯一的．

注　初学者往往忽略"$\mathscr{B}\subset\tau$"这个条件,这要特别引起注意．

(2)　当$p\in A$时,$\forall\ x\in X-\{p\}$,由于τ的基$\mathscr{B}_3$中包含x的元只有$\{p,x\}$,即x有一个邻域基,它只有一个元$\{p,x\}$,且$\{p,x\}\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$,所以$x\in A'$.

而当$p\notin A$时,$\forall\ x\in X,\{p,x\}\cap(A-\{x\})=\varnothing$,所以$x\notin A'$.因此

$$A' = \begin{cases} X - \{p\} & \text{当 } p \in A \text{ 时}, \\ \varnothing & \text{当 } p \notin A \text{ 时}. \end{cases}$$

类似地可得

$$\mathring{A} = \begin{cases} A & \text{当 } p \in A \text{ 时}, \\ \varnothing & \text{当 } p \notin A \text{ 时}. \end{cases}$$

1.3.2 证明不可数的特殊点拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$是第一可数的，可分的，不是 Lindelöf 的.

证 由上例可知，若 p 为特殊点，则$\overline{\{p\}}=X$，所以$\langle X,\tau\rangle$是可分的.

$\forall\ x\in X$，$\{x,p\}$是 x 的邻域，且 x 的每个邻域都包含$\{x,p\}$，因此$\{\{x,p\}\}$就是 x 的邻域基. 所以$\langle X,\tau\rangle$是第一可数的.

令$\mathscr{G}=\{\{x,p\}\mid x\in X-\{p\}\}$，则$\mathscr{G}$是 X 的开覆盖，由于 X 不可数，故$\mathscr{G}$也不可数，显然$\mathscr{G}$无子覆盖，所以$\langle X,\tau\rangle$不是 Lindelöf 的. □

1.3.3 证明不可数的有限补拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$(B1.2.11)是可分的，Lindelöf 的，不是第一可数的.

证 设 A 为 X 的一个可数无限子集，则$\forall\ x\in X$ 以及 $U\in\mathscr{N}(x)$，由于$\mathscr{C}U$ 有限，必有 $U\cap A\neq\varnothing$. 故 $x\in\overline{A}$，于是 A 稠密，$\langle X,\tau\rangle$是可分的.

设$\mathscr{G}$为 X 的任一开覆盖，设$G\in\mathscr{G}$ 且 $G\neq\varnothing$，则$\mathscr{C}G$ 有限，必有$\mathscr{G}$的有限个成员就能覆盖 X. 所以$\langle X,\tau\rangle$是 Lindelöf 的.

现设$\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$是点 x 的可数邻域基，则$\mathscr{C}U_i$ 有限($\forall\ i$)，因 X 不可数，故 $\exists\ y\in\bigcap\limits_{i\in\mathbf{N}}U_i=\mathscr{C}(\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}}(\mathscr{C}U_i))$ 使 $y\neq x$. 而$\mathscr{C}\{y\}\in\mathscr{N}(x)$且$\forall\ i,U_i\not\subset\mathscr{C}\{y\}$，与$\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$为邻域基矛盾. 所以$\langle X,\tau\rangle$不是第一可数的. □

1.3.4 设$\langle X,\rho\rangle$为度量空间，证明：如果 X 可分，则 X 是第二可数的.

证 设 D 为 X 的可数稠密子集，令 $\mathscr{B}_1=\{B(a,\frac{1}{n})\mid a\in D,n\in\mathbf{N}\}$. 则 $\mathscr{B}_1\subset\tau_\rho$，($\tau_\rho$ 为 ρ 诱导的拓扑). 现设 $G\in\tau_\rho$，$x\in G$，则 $\exists\ \varepsilon>0$，s.t. $B(x,.\varepsilon)\subset G$. 取 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\frac{2}{n}<\varepsilon$，便有 $B(x,\frac{2}{n})\subset G$，由于 $\overline{D}=X$，故 $B(x,\frac{1}{n})\cap D\neq\varnothing$，即 $\exists\ a\in D$ $s.t.$ $\rho(a,x)<\frac{1}{n}$，于是 $\forall\ y\in B(a,\frac{1}{n})$有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,a)+\rho(a,y)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n},$$

即 $B(a,\frac{1}{n})\subset B(x,\frac{2}{n})\subset G$，这就证明了 $\mathscr{B}_1$ 是 τ_ρ 的基，且 $\mathscr{B}_1$ 是可数的. □

1.3.5 设$\langle X,\tau\rangle$是第二可数的，证明 τ 的任何一个基 $\mathscr{C}$ 总存在一个可数子族 $\mathscr{C}_0\subset\mathscr{C}$，它也是 τ 的一个基.

证 设 $\mathscr{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是$\langle X,\tau\rangle$的一个可数基. 令

$$M=\{\langle n,m\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\mid\exists\ C\in\mathscr{C}\ \text{s.t.}\ B_n\subset C\subset B_m\}.$$

若 $B_m\neq\varnothing$，设 $x\in B_m$，因 $\mathscr{C}$ 是 τ 的基，故$\exists$ $C\in\mathscr{C}$ s.t. $x\in C\subset B_m$，又 $\mathscr{B}$ 是基，故 $\exists$ B_n s.t. $x\in B_n\subset C\subset B_m$. 故 $M\neq\varnothing$，且 M 可数.

$\forall$ $\langle n,m\rangle\in M$，取定一个 $C_{n,m}\in\mathscr{C}$ s.t. $B_n\subset C_{n,m}\subset B_m$，则

$$\mathscr{C}_0 = \{C_{n,m} \in \mathscr{C} \mid \langle n,m\rangle \in M\}$$

是 $\mathscr{C}$ 的可数子族，故 $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C} \subset \tau$.

现设 $G\in\tau, x\in G$，则 $\exists\ B_m\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in B_m\subset G$，又 $\exists\ C\in\mathscr{C}$ s.t. $x\in C\subset B_m$，又 $\exists\ B_n$ s.t. $x\in B_n\subset C\subset B_m$. 于是 $\langle n,m\rangle\in M$. 故有 $C_{n,m}\in\mathscr{C}_0$, s.t. $x\in B_n\subset C_{n,m}\subset B_m\subset G$. 故 $\mathscr{C}_0$ 是 τ 的一个基. □

1.3.6 (1) 证明连续函数空间 $\mathscr{C}([0,1],E^1)$，取上确界度量 ρ^*（即 $\rho^*(f,g)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|$），是可分的.

(2) 有界函数空间 $\mathscr{B}([0,1],E^1)=\{f:[0,1]\to E^1 \mid f([0,1])$ 在 E^1 中有界$\}$，取上确界度量，不是可分的.

证 (1) $\forall\ n\in\mathbf{N}$ 令

$$\mathscr{E}_n = \{f\in\mathscr{C}([0,1],E^1) \mid f(0)\in\mathbf{Q} \text{ 且 } \forall\ k=1,2,\cdots,n$$

$$f(\frac{k}{n})\in\mathbf{Q}, f|_{(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})} \text{ 是一次式}\},$$

则 $\mathscr{E}_n$ 可数，从而 $\mathscr{E}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n$ 可数.

设 $f\in\mathscr{C}([0,1],E^1)$，$B_{\rho^*}(f,\varepsilon)$ 为任一球形邻域，由于 f 在 $[0,1]$ 上一致连续，所以存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使当 $|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)$ 时

$$|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon/6$$

取 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{n}<\delta(\varepsilon)$，$\forall\ k=1,2,\cdots,n$ 选取 $r_k\in\mathbf{Q}$ 使

$$|f(\frac{k}{n})-r_k|<\varepsilon/6.$$

令 $g:[0,1]\to E^1$，使 $\forall\ k=1,2,\cdots,n$，$g(\frac{k}{n})=r_k$ 且 $g|_{(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}$ 是一次式，则 $g\in\mathscr{E}$，下面证明 $\rho^*(f,g)<\varepsilon$.

$\forall\ t\in[0,1]\ \exists\ k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ s.t. $\frac{k}{n}\leqslant t<\frac{k+1}{n}$，由 $g|_{(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}$ 是一次式，故

$$|g(\frac{k}{n})-g(t)|\leqslant|g(\frac{k}{n})-g(\frac{k+1}{n})|$$

于是，

$$\begin{aligned}|f(t)-g(t)| &\leqslant |f(t)-g(\frac{k}{n})|+|g(\frac{k}{n})-g(t)|\\ &\leqslant |f(t)-g(\frac{k}{n})|+|g(\frac{k}{n})-g(\frac{k+1}{n})|\\ &\leqslant f(t)-f(\frac{k}{n})|+|f(\frac{k}{n})-g(\frac{k}{n})|+|g(\frac{k}{n})-f(\frac{k}{n})|\\ &+|f(\frac{k}{n})-f(\frac{k+1}{n})|+|f(\frac{k+1}{n})-g(\frac{k+1}{n})|\\ &\leqslant 5\varepsilon/6\end{aligned}$$

所以

$$\rho^*(f,g)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|\leqslant 5\varepsilon/6<\varepsilon$$

这就表明 $g\in B_{\rho^*}(f,\varepsilon)\cap\mathscr{E}$. 于是 $f\in\overline{\mathscr{E}}$,即 $\mathscr{E}$ 稠密亦即 $\mathscr{C}([0,1],E^1)$是可分的.

(2) 设 $\mathscr{D}=\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$为 $\mathscr{B}([0,1],E^1)$的任一可数子集. 由于

$$[0,1]=\{1\}\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})\right),$$

令 $g:[0,1]\to E^1$ 为

$$g(t)=\begin{cases}0 & t=1,\\ 2 & t\in[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})\text{ 且 }\forall t'\in[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{1+n}),|f_n(t')|\leqslant 1,\\ 0 & t\in[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})\text{ 且 }\exists t'\in[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})\text{ s.t. }|f_n(t')|>1,\\ & n=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

则 $g\in\mathscr{B}([0,1],E^1)$且$\forall n\in\mathbf{N},\rho^*(g,f_n)\geqslant 1$. 所以

$$B_{\rho^*}(g,1)\cap\mathscr{D}=\varnothing,\text{即 } g\notin\overline{\mathscr{D}}.$$

于是,$\mathscr{B}([0,1],E^1)$的任一可数子集都不稠密,故 $\mathscr{B}([0,1],E^1)$不是可分的. □

注 在解有关可数性的习题时,常常要借助于自然数集和有理数集,并且有理数集的稠密性是很有用的. 本题的第(1)小题除了闭区间上连续函数的一致连续性外,就是凭借有理数集的稠密性作出证明的. 第(2)小题的基本思想就是根据数学分析中常用的"对角线法则"来构造函数 g 的. 将定义域$[0,1]$分成可数无限个区间,使在第 n 个区间$[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})$上 g 与 f_n 的函数值之差的绝对值的上确界$\geqslant 1$. 从而使 $g\notin\overline{\mathscr{D}}$,而得到我们所要证明的结果.

在《数学分析》,《复变函数》与《实变函数》中,我们知道对于 E^n 而言,A1.3.4 中的三个结果总是成立的. 但对于拓扑空间而言,则要加上"第一可数"这个条件(由于度量空间总是第一可数的,因此它们在度量空间中也总是成立的),如果不是第一可数的空间,则可不必成立. 下例就是(1),(2)的反例,对于(3)的反例见 B1.5.11.

1.3.7 试举例说明 A1.3.4(1),(2)对任意拓扑空间未必成立.

解 (1) 设 X 为不可数集,τ^* 为可数补拓扑(见 B1.2.11)取 $p\in X$,则 $p\in\overline{X-\{p\}}$,但由 B1.2.11 可知 $X-\{p\}$中任一序列都不会收敛到 p.

(2) 仍在上述空间中,尽管 $X-\{p\}$中任一收敛序列的极限总属于 $X-\{p\}$(由 B1.2.11 可知),但 $\mathscr{C}(X-\{p\})$不是开集,故 $X-\{p\}$不是闭集. □

1.3.8 设$\langle X,\tau\rangle$为可分空间,证明 X 中任一两两不相交的开集族 $\mathscr{G}$ 是可数族.

证 设 A 是 X 的可数稠密子集,则

$$\forall G\in\mathscr{G}-\{\varnothing\},G\cap A\neq\varnothing.$$

令

$$A_0=\bigcup\{G\cap A\mid G\in\mathscr{G}-\{\varnothing\}\},$$

则 A_0 是 A 的子集,故为可数集.

$\forall x\in A_0\exists G_x\in\mathscr{G}$ s.t. $x\in G_x$,由于 $\mathscr{G}$ 中元两两不相交,所以这个 G_x 是唯一的. 于是定义了一个映射

$$\varphi:A_0\to\mathscr{G}-\{\varnothing\},x\mapsto\varphi(x)=G_x.$$

显然 φ 是满射，所以 $\mathscr{G}-\{\varnothing\}$ 可数，从而 $\mathscr{G}$ 可数． □

注　由于第二可数总是可分的．所以对于第二可数空间，上述结论也成立，而实数轴 (E^1) 上任意一个两两不相交的开区间族是可数族的结论也是本例的特殊情形．

1.3.9　拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中一点 x 叫做子集 A 的凝聚点 $\Leftrightarrow \forall U\in\mathscr{N}(x)$ 有 $U\cap A$ 是不可数的．

设 $\langle X,\tau\rangle$ 是第二可数的，证明：

(1)　X 的每个不可数的子集 S 都有凝聚点 $x\in S$.

(2)　若 C 为子集 $A\subset X$ 的所有凝聚点组成的集合，则 $A-C$ 是可数的，C 是 X 的闭集且 $C\subset C'$，从而 $C'=C$（满足条件 $C'=C$ 的 C 叫完全集）.

证　(1)　设 S 不可数但 $\forall x\in S$ 都不是 S 的凝聚点．又设 $\mathscr{B}$ 是 $\langle X,\tau\rangle$ 的可数基．则 $\forall x\in S,\exists U_x\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $U_x\cap S$ 为可数集．从而 $\exists B_x\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in B_x\subset\overset{\circ}{U}_x$，故 $B_x\cap S$ 可数．现 $\forall x\in S$ 取定这样一个 $B_x\in\mathscr{B}$. 则 $\{B_x|x\in S\}$ 是可数族且

$$\bigcup\{B_x\cap S|x\in S\}\supset S$$

上式左端是可数集，右端是不可数集，这是一个矛盾．所以在 S 中必有 S 的凝聚点．

(2)　若 $A-C$ 不可数，由(1) $\exists\, x\in A-C$ s.t. x 是 $A-C$ 的凝聚点．于是 $\forall U\in\mathscr{N}(x)$，$U\cap(A-C)$ 不可数，从而 $U\cap A$ 不可数，即 $x\in C$，矛盾．故 $A-C$ 可数．

现设 $x\in\bar{C}$，则 $\forall U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$，$U\cap C\neq\varnothing$，故 $\exists\, y\in U\cap C$，而 $U\in\mathscr{N}(y)$ 且 $y\in C$，所以 $U\cap A$ 不可数，于是 $x\in C$，从而 $\bar{C}\subset C$，故 C 为闭集．

又 $\forall x\in C,\forall U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$，$U\cap A$ 不可数，而 $A-C$ 可数，故有 $U\cap C$ 不可数，必有 $x\in C'$，所以 $C\subset C'$，已证 C 为闭集，也有 $C'\subset C$，从而 $C'=C$，C 是完全集． □

注　(1)的结论可进一步推广到遗传 Lindelöf 空间中去(见 B1.4.3).

我们已经有了 ω-聚点，凝聚点的概念，可进一步对任一基数 m 引进 m-聚点的概念，使接触点，ω-聚点，凝聚点都是 m-聚点的特例．上述结果可得到进一步的推广．编者还在拓扑分子格中引进了 m-聚点的概念，作了相应的讨论．感兴趣的读者可参阅：(1)陈肇姜，拓扑空间中的 m-聚点，南京大学学报 Vol. 24, No. 2(1988)pp. 169－177，(2)陈肇姜，拓扑分子格中的 m-聚点，南京大学学报数学半年刊 No. 1(1988), pp. 42－49.

1.3.10　证明第二可数的拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$，总有 $\mathrm{Card}\,\tau\leqslant 2^{\aleph_0}$.

证　设 $\mathscr{B}$ 为 $\langle X,\tau\rangle$ 的可数基，则 $\forall G\in\tau-\{\varnothing\}$，记

$$\mathscr{B}(G)=\{B\in\mathscr{B}|B\subset G\}$$

令

$$\varphi:\tau-\{\varnothing\}\to\mathscr{P}(\mathscr{B}),\,G\mapsto\varphi(G)=\mathscr{B}(G)$$

由于 $\bigcup\mathscr{B}(G)=G$，故 φ 为单射，从而

$$\mathrm{Card}\,\tau=\mathrm{Card}(\tau-\{\varnothing\})\leqslant\mathrm{Card}\,\mathscr{P}(\mathscr{B})\leqslant 2^{\aleph_0}.$$

这里我们假定 τ 是无限的，因为 τ 有限就没有什么可证的． □

注　这道题表明对于第二可数的空间，开集的个数以实数集的基数为上界．

C 练习题

1.3.1 设 $\mathscr{B}$ 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的基，证明：

$\forall x\in X$

$$\mathscr{B}(x)=\{B\in\mathscr{B}\,|\,x\in B\}$$

是 x 的一个邻域基．

1.3.2 设 X 为无限集，$p\in X$ 为固定点．

$$\tau=\{G\subset X\,|\,p\notin G\text{ 或 }\mathscr{C}G\text{ 有限}\}$$

易证 τ 是 X 的一个拓扑．$\langle X,\tau\rangle$ 叫 Fort 空间．

(1) 求 $\langle X,\tau\rangle$ 的一个基．

(2) $A\subset X$，在 $\langle X,\tau\rangle$ 中，求 $\bar{A}$ 与 $\mathring{A}$.

1.3.3 设 $\langle X,\tau\rangle$ 是第一可数的拓扑空间，$A\subset X$，证明：A 是开集的充要条件为：对于 X 中任一序列 $\langle x_n\rangle_{x\in\mathbf{N}}$，如果 $\langle x_n\rangle_{x\in\mathbf{N}}\to x\in A$，那么存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时，$x_n\in A$.

1.3.4 证明实数的收敛序列空间 $\langle C,\rho\rangle$（见 C1.1.2）是可分的，有界序列空间 $\langle B,\rho\rangle$ 不是可分的．

1.3.5 设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间并存在一个有限的基 $\mathscr{B}$. 证明 $\langle X,\rho\rangle$ 必为只有有限个点的离散空间．

§1.4 拓扑空间的子空间

A 内容提要

1.4.1 定义 设 S 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的非空子集，$\tau_S=\{G\cap S\,|\,G\in\tau\}$ 是 S 的拓扑，叫做 S 的子空间拓扑（也叫相对拓扑、诱导拓扑）$\langle S,\tau_S\rangle$ 叫做 $\langle X,\tau\rangle$ 的子空间．如果 S 本身又是 X 的开（闭）集时，就叫 S 为开（闭）子空间．如果对于某种性质 P，只要 $\langle X,\tau\rangle$ 具有 P，那么 X 的每个子空间也有性质 P，则称 P 为遗传性质．

1.4.2 定理 设 S 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子空间，$A\subset S$，$x\in S$，则

(1) $A\in\mathscr{N}_S(x)\Leftrightarrow\exists\,U\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. $A=U\cap S$.

(2) $\mathrm{Cl}_S A=(\mathrm{Cl}_X A)\cap S$.

(3) A 闭于 $S\Leftrightarrow\exists\,F$ 闭于 X 使 $A=F\cap S$.

(4) 若 S 为开子空间，则 A 开于 $S\Leftrightarrow A$ 开于 X.

(5) 若 S 为闭子空间，则 A 闭于 $S\Leftrightarrow A$ 闭于 X.

1.4.3 定理 可分空间的开子空间是可分的，Lindelöf 空间的闭子空间是 Lindelöf 的，第一、二可数性是遗传性质．



B 例题

(一)

在解有关子空间的问题时，必须特别注意把相对于子空间而言的概念与相对于原始空间而言的概念严格区分开来．语言表述，文字符号等都要明确显示出来，绝对不能混淆，否则常常会导致错误．子空间 S 与原始空间 X 联系的纽带主要是：

G 开于 $S\Leftrightarrow\exists\ G^*$ 开于 X s.t. $G=G^*\cap S$.

G 闭于 $S\Leftrightarrow\exists\ F^*$ 闭于 X s.t. $F=F^*\cap S$.

$U\in\mathscr{N}_S(x)\Leftrightarrow\exists\ U^*\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. $U=U^*\cap S$.

$\mathrm{Cl}_S A=(\mathrm{Cl}_X A)\cap S$.

其中 G,U,A 都是 S 的子集．

1.4.1 设 $\langle X,\tau\rangle$ 为拓扑空间，p 为不属于 X 的元素，记

$$X^* = X\cup\{p\},\ \tau^* = \{G\cup\{p\}\mid G\in\tau\}\cup\{\varnothing\},$$

易证 τ^* 是 X^* 的拓扑，称 $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 为 $\langle X,\tau\rangle$ 的闭扩张（因为 X^* 的异于 X^* 的闭集恰好就是 X 的全体闭集）．证明

(1) $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 是可分的．

(2) $\langle X,\tau\rangle$ 是 $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 的子空间．

(3) $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 是第二可数的 $\Leftrightarrow\langle X,\tau\rangle$ 是第二可数的．

(4) $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 是 Lineloöf 的 $\Leftrightarrow\langle X,\tau\rangle$ 是 Lindelöf 的．

证 (1) 易见 $\mathrm{Cl}_{X^*}\{p\}=X^*$，故 $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 可分．

(2) $\forall\ G^*\in\tau^*$，若 $G^*\neq\varnothing$，则 $\exists\ G\in\tau$ s.t. $G^*=G\cup\{p\}$，于是 $G^*\cap X=G\in\tau$. 所以

$$\{G^*\cap X\mid G^*\in\tau^*\}\subset\tau.$$

反之，$\forall\ G\in\tau$，取 $G^*=G\cup\{p\}$，则 $G^*\in\tau^*$ 且 $G=G^*\cap X$. 所以 $\tau\subset\{G^*\cap X\mid G^*\in\tau^*\}$. 从而 $\langle X,\tau\rangle$ 是 $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 的子空间．

(3) "$\Rightarrow$" 因第二可数性质是遗传性质，故得结论．

"$\Leftarrow$" 设 $\mathscr{B}$ 是 $\langle X,\tau\rangle$ 的可数基．令

$$\mathscr{B}^* = \{B\cup\{p\}\mid B\in\mathscr{B}\}\cup\{\{p\}\}.$$

显然 $\mathscr{B}^*\subset\tau^*$. $\forall\ G^*=G\cup\{p\}$（其中 $G\in\tau$）以及 $x\in G^*$，若 $x=p$ 则有 $\{p\}\in\mathscr{B}^*$ 使 $p\in\{p\}\subset G^*$；若 $x\neq p$，则 $x\in G$，故 $\exists\ B\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in B\subset G$. 于是取 $B^*=B\cup\{p\}\in\mathscr{B}^*$，就有 $x\in B^*\subset G\cup\{p\}=G^*$. 所以 $\mathscr{B}^*$ 是 τ^* 的基，且显然是可数的．

(4) "$\Rightarrow$" 由于 $X=X^*-\{p\}$ 是 X^* 的闭子空间，故得结论．

"$\Leftarrow$" 设 $\mathscr{G}^*$ 是 $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 的任一开覆盖，则 $\mathscr{G}=\{G^*\cap X\mid G^*\in\mathscr{G}^*\}$ 是 $\langle X,\tau\rangle$ 的开覆盖，所以存在可数子族 $\{G_i^*\cap X\mid i\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{G}$ 覆盖 X，则相应的 $\{G_i^*\mid i\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{G}^*$ 覆盖 X^*，所以 $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 是 Lindelöf 的． □

注 这个例子告诉我们：

(1) 可分空间未必是第二可数的，也未必是 Lindelöf 的．因为非第二可数的，非 Lin-

delöf 的空间$\langle X,\tau\rangle$的闭扩张$\langle X^*,\tau^*\rangle$总是可分的，但仍然非第二可数，非 Lindelöf.

(2) 可分性不是遗传性质.

1.4.2 设 X 为不可数集，$p\in X$ 是固定的点，

$$\tau=\mathscr{P}(X-\{p\})\cup\{G\subset X\mid p\in G \text{ 且 } \mathscr{C}G \text{ 可数}\}$$
$$=\{G\subset X\mid p\notin G \text{ 或 } \mathscr{C}G \text{ 可数}\}.$$

易证 τ 为 X 的拓扑，证明：

(1) $\langle X,\tau\rangle$是 Lindelöf 的.

(2) $\langle X,\tau\rangle$不是可分的，从而也不是第二可数的.

(3) $S=X-\{p\}$作为子空间不是 Lindelöf 的.

证 (1) 设$\mathscr{G}$为 X 的任一开覆盖，则$\exists$ $G\in\mathscr{G}$ s.t. $p\in G$，于是$\mathscr{C}G$可数，则存在$\mathscr{G}$的可数子族$\mathscr{G}_1$，覆盖$\mathscr{C}G$，从而$\mathscr{G}$的可数子族$\mathscr{G}_1\cup\{G\}$覆盖 X，所以$\langle X,\tau\rangle$是 Lindelöf 的.

(2) 设 A 为 X 的任一可数子集，则$\mathscr{C}A$不可数，取$x\in\mathscr{C}A$使$x\neq p$，则$\{x\}\in\mathscr{N}(x)$且$\{x\}\cap A=\varnothing$，从而 A 不是稠密的，所以$\langle X,\tau\rangle$不可分.

(3) 因$\{\{x\}\mid x\in S\}$是 S 的一个开覆盖($\{x\}$都是子空间 S 的开集)但无可数子覆盖，故 S 不是 Lindelöf 的. □

注 这个例子说明：Lindelöf 空间未必可分，也未必是第二可数的；Lindelöf 性质不是遗传性质.

1.4.3 若拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$的每个子空间都是 Lindelöf 的，则称$\langle X,\tau\rangle$是遗传 Lindelöf 的.

(1) 给出遗传 Lindelöf 空间的一些例子.

(2) 证明遗传 Lindelöf 空间中每个不可数集 A 都有凝聚点 $x\in A$.

解 (1) 可分度量空间：如 E^n，连续函数空间(取上确界度量)$\mathscr{C}([0,1],E^1)$(B1.3.6(1))，收敛序列空间$\langle C,\rho\rangle$(C1.3.4)都是遗传 Lindelöf 的；可数补拓扑空间，第二可数的拓扑空间也都是遗传 Lindelöf 的.

(2) 设 A 为遗传 Lindelöf 空间$\langle X,\tau\rangle$的不可数集，假定$\forall$ $x\in A$ 都不是 A 的凝聚点. 则$\forall$ $x\in A$ $\exists$ $U_x\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $U_x\cap A$ 为可数集，于是$\mathscr{U}=\{U_x\cap A\mid x\in A\}$是子空间 A 的一个开覆盖，故有可数子族$\{U_{x_1}\cap A,U_{x_2}\cap A,\cdots,U_{x_n}\cap A,\cdots\}\subset\mathscr{U}$使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_{x_n}\cap A)=A.$$

但等式左端为可数集，右端为不可数集，这是一个矛盾，从而证明了 A 必有凝聚点属于 A. □

注 B1.3.9(1)是这里的特例.

(二) 常见错误分析

1.4.4 证明：拓扑空间 X 是遗传 Lindelöf 的$\Leftrightarrow X$ 的每个开子空间是 Lindelöf 的.

"$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 因为 X 本身是 X 的开子空间，所以 X 是 Lindelöf 的. 由 A1.4.3 知 X 的每个闭子空间是 Lindelöf 的，又据假设条件 X 的每个开子空间是 Lindelöf 的，所以 X 的每个子空

间是 Lindelöf 的，即 X 是遗传 Lindelöf 的．

试分析上述证明错在何处．

分析　初学者往往认为拓扑空间的一个子集不是开集就是闭集，不是闭集就是开集，拓扑空间就是这两类子集构成的．这是一种心理上的习惯性错误．应予杜绝．这里的“开”与“闭”既不是对立的（事实上 $\varnothing$ 以及全空间 X 就是既开又闭的），也不是互为否定的（一般地，都有既非开集又非闭集的子集存在，如半开半闭的区间 $(0,1]$ 就是 E^1 中既非开集又非闭集的子集）．由此可知上述证明只是肯定了 X 的开子空间与闭子空间是 Lindelöf 的，而没有证明所有子空间都是 Lindelöf 的，因此是错误的．

正确的证明如下：

“$\Leftarrow$”　设 S 为 X 的任一子空间，$\mathscr{G}$ 是 S 在 X 中的开覆盖（即 $\mathscr{G}\subset\tau$ 且 $\bigcup\mathscr{G}\supset S$），令 $G=\bigcup\mathscr{G}$，则 $G\in\tau$，根据假设条件，G 作为子空间是 Lindelöf 的，而 $\mathscr{G}$ 恰好就是 G 在 X 中的开覆盖，故有可数子覆盖 $\{G_n|n\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{G}$，而 $S\subset G$，故 $\{G_n|n\in\mathbf{N}\}$ 也覆盖 S. 故由 C1.4.4 知 S 是 Lindelöf 的．这就证明了 X 是遗传 Lindelöf 的． □

1.4.5　**证明可分度量空间的每个子空间都是可分的．**

［法一］　设 $\langle X,\rho\rangle$ 是可分度量空间，S 是 X 的任一子空间．若 S 为开子空间，则由 A1.4.3，S 是可分的，若 S 为闭子空间，由于 $\langle X,\rho\rangle$ 可分，故 $\langle X,\rho\rangle$ 也是 Lindelöf 的．所以闭子空间 S 也是 Lindelöf 的，从而也可分．

［法二］　设 A 为 $\langle X,\rho\rangle$ 的可数的稠密子集，则 $A\cap S$ 可数．$\forall\ x\in S$ 以及 x 在 S 中的任一邻域 U，$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $B(x,\varepsilon)\subset U\subset S$，而 A 是 X 的稠密子集，故 $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$，而

$$U\cap(A\cap S)\supset B(x,\varepsilon)\cap(A\cap S)=(B(x,\varepsilon)\cap S)\cap A$$
$$=B(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing,$$

所以 $x\in \mathrm{Cl}_S(A\cap S)$. 即 $A\cap S$ 是 S 的可数稠密子集，从而 S 可分．

试分析上述证明中的错误所在．

［法一］中的错误与上例相同．

对于［法二］，粗看起来似乎并没有错．现在我们先考察下述反例：若取 $X=E^1$，$A=\mathbf{Q}$，$S=\mathscr{C}\mathbf{Q}$，则 A 是 X 的可数稠密子集，但 $A\cap S=\varnothing$，无论如何也不能是 S（作为子空间）的稠密子集．由此可知上述证明肯定是错误的．到底错在何处呢？

仔细检查就会发现，问题出在“球形邻域”上．在关系式 $B(x,\varepsilon)\subset U\subset S$ 中的 $B(x,\varepsilon)$ 是指 x 在子空间 S 中的球形邻域，即

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in S|\rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

而在关系式 $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$ 中，又把 $B(x,\varepsilon)$ 当成 x 在 X 中的球形邻域了，即当成集合 $\{y\in X|\rho(x,y)<\varepsilon\}$ 了．因为 A 是空间 X 的稠密子集，所以只有 X 中的非空开集才必然与 A 相交，$B(x,\varepsilon)$ 只是子空间 S 的开集，未必是 X 的开集，故不能断定有 $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$ 成立．所以上述证明中的错误就在于把子空间中的球形邻域与原始空间中的球形邻域这两个概念混淆起来了而导致的．

正确的证明应该是：

$\langle X,\rho\rangle$ 可分 $\Rightarrow\langle X,\rho\rangle$ 第二可数 $\Rightarrow$ 子空间 S 第二可数 $\Rightarrow$ 子空间 S 可分．

若要由 X 的可数稠密子集 A 求 S 的可数稠密子集，则可如下进行：先求 $\langle X,\rho\rangle$ 的可数

基 $\mathscr{B}=\{B_X(x,\frac{1}{n})\mid x\in A,n\in\mathbf{N}\}$，其中 $B_X(x,\frac{1}{n})=\{y\in X\mid\rho(x,y)<\frac{1}{n}\}$. 由此可得 S 的可数基 $\mathscr{B}_S=\{B_X(x,\frac{1}{n})\cap S\mid x\in A,n\in\mathbf{N}\}$. $\forall\ n\in\mathbf{N}$，只要 $B_X(x,\frac{1}{n})\cap S\neq\varnothing$，就取 $x_n\in B_S(x,\frac{1}{n})$，由这些 x_n 组成的可数子集它在 S 中稠密． □

C　练习题

1.4.1　设 $X=(0,1)$ 是 E^1 的开区间，令

$$\tau=\{(\frac{1}{n},1)\mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{\varnothing,X\}.$$

(1)　验证 τ 是 X 的一个拓扑．

(2)　$\langle X,\tau\rangle$ 是否为 E^1 的子空间，为什么？

1.4.2　设 S 是拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子空间，$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 为 S 中的序列，证明 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 在子空间 S 中收敛于点 $x\Leftrightarrow\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 在 X 中收敛于 $x\in S$.

1.4.3　设 A 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的非空子集，证明 A 是 X 的离散的闭子空间 $\Leftrightarrow A'=\varnothing$. 其中 A' 为 A 在 X 中的导集．

1.4.4　证明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子空间 $\langle S,\tau_S\rangle$ 是 Lindelöf 的 $\Leftrightarrow S$ 在 X 中的任一开覆盖 $\mathscr{G}$ ($\mathscr{G}\subset\tau$ 且 $S\subset\bigcup\mathscr{G}$) 都有可数子覆盖．

1.4.5　设 $\langle X,\tau\rangle$ 为任一拓扑空间，$p\notin X$，$X^*=X\cup\{p\}$，令

$$\tau^*=\tau\cup\{X^*\}\cup\{X^*-F\mid F\subset X\text{ 且为 X 的 Lindelöf 闭子空间}\}.$$

证明 τ^* 是 X^* 的拓扑，$\langle X^*,\tau^*\rangle$ 是 Lindelöf 的.

§1.5　定义拓扑的各种方式

A　内容提要

1.5.1 **定理**　设 X(非空，下同)的子集族 σ 满足闭集公理[C.1]—[C.3](A1.2.2)，则 $\tau=\{G\subset X\mid\mathscr{C}G\in\sigma\}$ 是 X 的唯一的拓扑，它使 σ 恰为余拓扑．

1.5.2 **定理**　设 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 满足

[B.1]　$\bigcup\mathscr{B}=X$,

[B.2]　$B_1,B_2\in\mathscr{B}$ 且 $x\in B_1\cap B_2\Rightarrow\exists\ B\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in B\subset B_1\cap B_2$.

则　$\tau=\{G\subset X\mid\forall\ x\in G\ \exists\ B\in\mathscr{B}\text{ s.t. }x\in B\subset G\}$ 是 X 上唯一的拓扑能使 $\mathscr{B}$ 恰为 τ 的基．

1.5.3 **定义**　设 $\mathscr{S}$ 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子集族，如果由 $\mathscr{S}$ 的一切有限个成员之交所成的集族恰为 τ 的基，则称 $\mathscr{S}$ 为 $\langle X,\tau\rangle$(或 τ)的子基．

1.5.4 定理　设 $\mathscr{S}$ 为 X 的覆盖，则

$$\tau=\{G\subset X|\forall\ x\in G\ \exists\ S_1,\cdots,S_{n(x)}\in\mathscr{S}\ \text{s.t.}\ x\in\bigcap_{i=1}^{n(x)}S_i\subset G\}$$

是 X 的唯一的拓扑能使 $\mathscr{S}$ 恰为 τ 的子基，且 τ 是包含 $\mathscr{S}$ 的最小的拓扑．

1.5.5　定理　设 X 的每一点 x 都对应着一个子集族 $\mathscr{N}(x)$，且 $\{\mathscr{N}(x)|x\in X\}$ 满足邻域公理[N.1]－[N.4](A1.2.4)，则 $\tau=\{G\subset X|\forall\ x\in G,G\in\mathscr{N}(x)\}$ 是 X 的唯一的拓扑能使每个 $\mathscr{N}(x)$ 恰为 x 的邻域系．

1.5.6 定理　设 X 的每一点 x 都对应着一个子集族 $\mathscr{B}(x)$ 且 $\{\mathscr{B}(x)|x\in X\}$ 满足下述邻域基公理：

[NB.1]　$\forall\ x\in X,\mathscr{B}(x)\neq\varnothing;\forall\ B\in\mathscr{B}(x),x\in B.$

[NB.2]　$B_1,B_2\in\mathscr{B}(x)\Rightarrow\exists\ B\in\mathscr{B}(x)\ \text{s.t.}\ B\subset B_1\cap B_2.$

[NB.3]　$B\in\mathscr{B}(x)\Rightarrow\exists\ B_0\in\mathscr{B}(x)\ \text{s.t.}\ \forall\ y\in B_0\exists\ B_1\in\mathscr{B}(y)$ 合于 $B_1\subset B.$

则 $\tau=\{G\subset X|\forall\ x\in G,\exists\ B\in\mathscr{B}(X)\ \text{s.t.}\ B\subset G\}$ 是 X 的唯一的拓扑能使每个 $\mathscr{B}(x)$ 恰为 x 的邻域基．

如果 $\{\mathscr{B}(x)|x\in X\}$ 满足[NB.1]，[NB.2]以及

[NB.3]′　$B\in\mathscr{B}\{x)\Rightarrow\forall\ \ y\in B\ \exists\ B_1\in\mathscr{B}(y)\ \text{s.t.}\ B_1\subset B.$

则如上所作的 τ 是 X 的唯一的拓扑能使每个 $\mathscr{B}(x)$ 恰为 x 的开邻域基．

注　用公理[NB.1]－[NB.3]决定的拓扑只能使 $\mathscr{B}(x)$ 成为 x 的邻域基，未必是开邻域基，而当[NB.3]换成较强的条件[NB.3]′后决定的拓扑就能使 $\mathscr{B}(x)$ 成为开邻域基．在应用时，注意到这一点是有益的．后面将会看到概率度量空间，赋予一致收敛拓扑的函数空间，它们的拓扑就是由[NB.1]，[NB.2]以及较弱的[NB.3]决定的．

B　例题

(一)

除了用开集公理定义拓扑以外，最常见的是用拓扑基、拓扑子基生成拓扑或用邻域基诱导拓扑．

在解用拓扑基、拓扑子基为原始概念生成拓扑或用邻域基为原始概念诱导拓扑的问题时，一般不必要知道具体的拓扑，即开集的具体形式，只要把握住拓扑基(或子基)、邻域基的特征就可直接解题了．

1.5.1　由 $\mathbf{R}$ 的子集族 $\mathscr{B}_S=\{[a,b)|a,b\in\mathbf{R},a<b\}$ 或 $\mathscr{B}_{ro}=\{(a,+\infty)|a\in\mathbf{R}\}$（它们都满足公理[B.1]，[B.2]）为拓扑基，分别生成拓扑 τ_S 与 τ_{ro}，我们称 $\langle\mathbf{R},\tau_S\rangle$ 为 Sorgenfrey 直线(或右半开区间拓扑空间)，记作 $\mathbf{R}_S$，称 $\langle\mathbf{R},\tau_{ro}\rangle$ 为右序拓扑空间，记作 $\mathbf{R}_{ro}$.

(1) 试描述 $\mathbf{R}$ 的任一子集 A 分别在 $\mathbf{R}_S$ 与 $\mathbf{R}_{ro}$ 中的闭包．

(2) 比较 $\mathbf{R}$ 上的拓扑 τ_S,τ_{ro} 与通常拓扑(即欧氏度量诱导的拓扑，记作 τ)的大小．

解 在 $\mathbf{R}_S$ 中，注意到 τ_S 的基 $\mathscr{B}_S=\{[a,b)|a,b\in\mathbf{R},a<b\}$．若 $A\neq\varnothing$，

$$x\in \mathrm{Cl}_{\mathbf{R}_S}A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\ [x,x+\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$$

$$\Leftrightarrow x = \inf\{y \in A \mid y > x\}$$
$$\Leftrightarrow \exists\ B \subset A \text{ s.t. } x = \inf B.$$

所以

$$\mathrm{Cl}_{\mathbf{R}_S} = \begin{cases} \varnothing & A = \varnothing \text{ 时}, \\ \{x \in \mathbf{R} \mid \exists\ B \subset A \text{ s.t. } x = \inf B\} & A \neq \varnothing \text{ 时}. \end{cases}$$

例如 $A=\{\pm\frac{1}{n+1}|n\in\mathbf{N}\}\cup\{1-\frac{1}{n+1}|n\in\mathbf{N}\}$，则由上式立即可知 $\mathrm{Cl}_{\mathbf{R}_S}A=A\cup\{0\}$.

在 $\mathbf{R}_{ro}$ 中，τ_{ro} 的基 $\mathscr{B}_{ro}=\{(a,+\infty)|a\in\mathbf{R}\}$. $x\in\mathrm{Cl}_{\mathbf{R}_{ro}}A\Leftrightarrow\forall\ a<x,(a,+\infty)\cap A\neq\varnothing$. 故

$$\mathrm{Cl}_{\mathbf{R}_{ro}}A = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{当 } A \neq \varnothing \text{ 且无上界时}, \\ (-\infty, \sup A] & \text{当 } A \neq \varnothing \text{ 且有上界时}, \\ \varnothing & \text{当 } A = \varnothing \text{ 时}. \end{cases}$$

现比较 τ_S,τ_{ro},τ 的大小(是指由"$\subset$"确定的偏序下的大小).

易见 $\mathscr{B}_{ro}\subset\tau$，所以 $\tau_{ro}\subset\tau$. 又 $(0,2)\in\tau$，$1\in(0,2)$ 但不存在 $B\in\mathscr{B}_{ro}$ 使 $1\in B\subset(0,2)$，故 $(0,2)\notin\tau_{ro}$，所以 $\tau_{ro}\subset\tau$ 且 $\tau_{ro}\neq\tau$.

$\forall\ a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，$(a,b)=\bigcup_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ n\geqslant n_0}}[a+\frac{1}{n},b)$，其中 $n_0\in\mathbf{N}$ s.t. $a+\frac{1}{n_0}<b$. 这就表明 τ 的基 $\mathscr{B}\subset\tau_S$，所以 $\tau\subset\tau_S$，又 $[a,b)\in\tau_S$ 但 $[a,b)\notin\tau$，故 $\tau\neq\tau_S$. 综上可得 $\tau_{ro}\subset\tau\subset\tau_S$ 且互不相等．□

1.5.2 设 $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}=\{[a,b)\subset\mathbf{R}|a,b\in\mathbf{Q},a<b\}$，证明能以 $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ 为拓扑基生成 $\mathbf{R}$ 的一个拓扑 $\tau_{\mathbf{Q}}$，试比较 $\tau_{\mathbf{Q}}$ 与 τ_S 的大小，并求 $A=(0,\sqrt{2})$，$B=(\sqrt{2},3)$ 在 $\langle\mathbf{R},\tau_{\mathbf{Q}}\rangle$ 以及 $\mathbf{R}_S$ 中的闭包．其中 τ_S 如 B1.5.1.

解 首先容易验证 $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ 满足[B.1]－[B.2]，故可由 $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ 为基生成拓扑 $\tau_{\mathbf{Q}}$.

由于 $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}\subset\mathscr{B}_S\subset\tau_S$，故 $\tau_{\mathbf{Q}}\subset\tau_S$.

考察 $[\sqrt{2},\sqrt{2}+1)\in\tau_S$，但对任一 $[a,b)\in\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$，如果有 $\sqrt{2}\in[a,b)$ 必有 $a<\sqrt{2}$，从而 $[a,b)\not\subset[\sqrt{2},\sqrt{2}+1)$. 这就表明 $[\sqrt{2},\sqrt{2}+1)\notin\tau_{\mathbf{Q}}$，从而 $\tau_{\mathbf{Q}}\neq\tau_S$.

不难算出

$$\mathrm{Cl}_{\tau_{\mathbf{Q}}}A=[0,\sqrt{2}],\qquad \mathrm{Cl}_{\tau_{\mathbf{Q}}}B=[\sqrt{2},3);$$
$$\mathrm{Cl}_{\tau_S}A=[0,\sqrt{2}),\qquad \mathrm{Cl}_{\tau_S}B=[\sqrt{2},3).$$
□

注 我们知道 $\{(a,b)\subset\mathbf{R}|a,b\in\mathbf{R},a<b\}$ 与 $\{(a,b)\subset\mathbf{R}|a,b\in\mathbf{Q},a<b\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上等价的拓扑基(所谓等价的拓扑基，是指它们是同一个拓扑的基)，它们都是 $\mathbf{R}$ 上通常拓扑的基，然而上述例子表明 $\mathscr{B}_{\mathbf{Q}}$ 与 $\mathscr{B}_S$ 却不等价，因为它们分别是两个不同的拓扑 $\tau_{\mathbf{Q}}$ 与 τ_S 的基．所以我们不能被表面形式的雷同所迷惑．

1.5.3 设 $\mathscr{B}$ 是非空集 X 的满足[B,1]，[B,2]的子集族，证明由 $\mathscr{B}$ 为基生成的拓扑 τ 是 X 的包含 $\mathscr{B}$ 的最小的拓扑．

证 设 τ^* 也是 X 的包含 $\mathscr{B}$ 的拓扑．$\forall\ G\in\tau$ 以及 $x\in G$，$\exists\ B\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in B\subset G$. 由于 $B\in\tau^*$ 所以 $x\in\mathrm{Int}_{\tau^*}G$，故 $G\in\tau^*$ 即 $\tau\subset\tau^*$．□

1.5.4 设 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为非空集 X 上的一族拓扑，试问 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ 与 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ 是否也是 X 上的拓扑?

并证明存在包含于所有 τ_λ 内的唯一的最大拓扑(记作 $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$)称为 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的下确界，也存在包含所有 τ_λ 的最小拓扑(记作 $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$)称为 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的上确界．

解　容易验证 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ 也是 X 的一个拓扑，它就是 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的下确界．

而 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ 就未必是 X 的拓扑，例如：$X=\{1,2,3\}$，$\tau_1=\{\varnothing,X,\{1\}\}$，$\tau_2=\{\varnothing,X,\{2\}\}$ 是 X 的两个拓扑．但 $\tau_1\cup\tau_2=\{\varnothing,X,\{1\},\{2\}\}$ 却不是 X 的拓扑．不过由于 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ 覆盖 X，故可以由 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ 为拓扑子基生成一个拓扑，这个拓扑就是包含 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ 的最小拓扑，即 $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$．　□

注　如果偏序集 $\langle X,\leqslant\rangle$ 的每个非空子集都有上确界与下确界，则称 $\langle X,\leqslant\rangle$ 为完备格．于是在 X 上的所有可能定义的拓扑组成的集合，以"$\subset$"作为偏序，即成一个完备格，平凡拓扑与离散拓扑分别是这个完备格的最小元与最大元．

1.5.5　设 X 为非空集，τ_f 为有限补拓扑，

$$\tau_e=\{G\subset X\mid p\notin G\}\cup\{X\},$$

其中 $p\in X$ 为固定点，τ_e 也是 X 的拓扑，叫做排外点(排斥 p)拓扑．令 $\tau=\tau_f\vee\tau_e$，则 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做 Fort 空间．试具体描述 Fort 空间中的开集．证明 Fort 空间是 Lindelöf 的，当 X 不可数时不是第一可数的，也不是可分的．

解　由于 $\tau_f\cup\tau_e$ 是 τ 的子基，所以

$$\mathscr{B}\xlongequal{\text{def}}\{A\cap B\mid A\in\tau_f,B\in\tau_e\}$$

是 τ 的一个基．

设 $G\in\tau$ 且 $\mathscr{C}G$ 无限，则必有 $p\notin G$. 事实上，如果 $p\in G$，则$\exists$ $A\cap B\in\mathscr{B}$ s.t. $p\in A\cap B\subset G$. 于是

$$\mathscr{C}G\subset\mathscr{C}(A\cap B)=(\mathscr{C}A)\cup(\mathscr{C}B).$$

而 $\mathscr{C}A$ 有限，故 $\mathscr{C}B$ 无限，所以 $B\neq X$，但因 $B\in\tau_e$ 且 $p\in B$ 必有 $B=X$，导致矛盾．所以 $p\notin G$. 这就证明了

$$\tau=\tau_f\cup\tau_e=\{G\subset X\mid p\notin G\text{ 或 }\mathscr{C}G\text{ 有限}\}.$$

现设 $\mathscr{G}$ 是 $\langle X,\tau\rangle$ 的任一开覆盖，则$\exists$ $G\in\mathscr{G}$ 使 $p\in G$，故由上一段的结论可知 $\mathscr{C}G$ 有限，从而只需 $\mathscr{G}$ 的有限个成员就能覆盖 X，$\langle X,\tau\rangle$ 是 Lindelöf 的．

当 X 不可数时，设 $\{U_i\mid i\in\mathbf{N}\}$ 为 p 点的可数邻域基(在 τ 之下)，由于每个 $\mathscr{C}U_i$ 有限，故 $\mathscr{C}(\bigcap_{i\in\mathbf{N}}U_i)=\bigcup_{i\in\mathbf{N}}(\mathscr{C}U_i)$ 可数，因此$\exists$ $q\in\bigcap_{i\in\mathbf{N}}U_i$ s.t. $q\neq p$. 而 $\mathscr{C}\{q\}$ 为 p 的邻域但不包含任一 U_i，与 $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 为 p 的邻域基矛盾．所以 $\langle X,\tau\rangle$ 不是第一可数的．

仍假定 X 不可数，A 为 X 的可数无限子集，则$\exists$ $x\in\mathscr{C}(A\cup\{p\})$，又 $\mathscr{C}(A\cup\{p\})\in\tau_e\subset\tau$，所以 $x\notin\overline{A}$，从而 $\langle X,\tau\rangle$ 不是可分的．　□

注　C.1.3.2 中的空间就是 Fort 空间．

1.5.6　证明 Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$ 是第一可数的，可分的，Lindelöf 的，却不是第二可数的．

证　(1)　设 $\mathscr{G}=\{[a_\lambda,b_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是由基元素组成的 $\mathbf{R}_S$ 的开覆盖，其中$\forall$ $\lambda\in\Lambda$，$a_\lambda<b_\lambda$. 令 $B=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda,b_\lambda)$. 由于 E^1 的每个子空间都是 Lindelöf 的，所以 B 作为 E^1 的子空间，应有可数集 $\Lambda_0\subset\Lambda$ 使 $B=\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0}(a_\lambda,b_\lambda)$. 记 $A=\mathbf{R}-B$，$\forall$ $x\in A$，取定一个 $\lambda(x)\in\Lambda$ s.t. $x\in[a_{\lambda(x)},$

$b_{\lambda(r)}$). 因 $x\notin B$,故必有 $x=a_{\lambda(x)}$. 令 $\mathscr{U}=\{[x,b_{\lambda(x)})\mid x\in A\}\subset\mathscr{G}$. 现任取 $\mathscr{U}$ 的两个成员 $[x,b_{\lambda(x)})$, $[y,b_{\lambda(y)})$, $x,y\in A$ 且 $x<y$. 则有 $[x,b_{\lambda(x)})\cap[y,b_{\lambda(y)})=\varnothing$. 事实上,若有 $z\in[x,b_{\lambda(x)})\cap[y,b_{\lambda(y)})$,则 $a_{\lambda(x)}=x<y\leqslant z<b_{\lambda(x)}$,于是 $y\in(a_{\lambda(x)},b_{\lambda(x)})\subset B$,导致矛盾. 现 $\forall\ x\in A$ 取定一点 $r(x)\in[x,b_{\lambda(x)})\cap\mathbf{Q}$,则映射 $r:A\to\mathbf{Q}$, $x\mapsto r(x)$ 是单射,所以 A 可数,从而 $\{[a_\lambda,b_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda_0\}\cup\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{G}$ 的可数子族且覆盖 $\mathbf{R}$. 故由 A1.3.6 可知 $\mathbf{R}_S$ 是 Lindelöf 的.

(2) 设 $\mathscr{B}^*$ 是 $\mathbf{R}_S$ 的任意一个基. $\forall\ x\in\mathbf{R}$,因 $[x,x+1)$ 是 $\mathbf{R}_S$ 的开集,故 $\exists\ B(x)\in\mathscr{B}^*$ s.t. $x\in B(x)\subset[x,x+1)$,故 $\min B(x)=x$. 现 $\forall\ x\in\mathbf{R}$, 取定一个 $B(x)\in\mathscr{B}^*$,则映射 $f:\mathbf{R}\to\mathscr{B}^*$, $x\mapsto B(x)$ 是单射. 故 $\mathscr{B}^*$ 不可数. 所以 $\mathbf{R}_S$ 不是第二可数的.

(3) $\forall\ x\in\mathbf{R}$, $\mathscr{B}(x)=\{[x,b)\mid b\in\mathbf{Q},x<b\}$ 就是 x 的可数邻域基,所以 $\mathbf{R}_S$ 是第一可数的. 又 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}_S$ 的可数稠密子集,所以 $\mathbf{R}_S$ 是可分的. □

注 仿照(1)可证 $\mathbf{R}_S$ 的任一子空间都是 Lindelöf 的,即 $\mathbf{R}_S$ 是遗传 Lindelöf 的.

1.5.7 设 $\langle X,\leqslant\rangle$ 为全序集, $\forall\ a,b\in X$,记

$$(\leftarrow,b)=\{x\in X\mid x<b\},\ (a,\to)=\{x\in X)\mid x>a\},$$
$$(\leftarrow,b]=\{x\in X\mid x\leqslant b\},\ [a,\to)=\{x\in X\mid x\geqslant a\},$$

其它形式的区间(A 为区间 $\Leftrightarrow\forall\ a,b\in A$, $\{x\in X\mid a\leqslant x\leqslant b\}\subset A$)所用的记号与实数的区间意义相同,令

$$\mathscr{S}=\{(\leftarrow,b)\mid b\in X\}\cup\{(a,\to)\mid a\in X\},$$

如果 X 至少有两个点,则由 $\mathscr{S}$ 为拓扑子基生成的拓扑,叫做 X 的序拓扑(或区间拓扑). 证明在序拓扑空间中,

(1) $\forall\ a,b\in X$ 且 $a<b$, $\overline{(a,b)}\subset[a,b]$.

(2) $\overline{(a,b)}=[a,b]\Leftrightarrow\forall\ c>a,(a,c)\neq\varnothing$ 且 $\forall\ c<b,(c,b)\neq\varnothing$.

(3) 设 S 为 X 的区间,则 S 的子空间拓扑与 S 本身的序拓扑相同. 举例说明当 S 为任意子集时,子空间拓扑与序拓扑未必相同.

证 (1) 设 $x\notin[a,b]$,则 $x<a$ 或 $x>b$. 即 $x\in(\leftarrow,a)\cup(b,\to)$,

而 $((\leftarrow,a)\cup(b,\to))\cap(a,b)=\varnothing$,故 $x\notin\overline{(a,b)}$,从而 $\overline{(a,b)}\subset[a,b]$.

(2) "$\Rightarrow$"由 $[a,b]=\overline{(a,b)}$ 得 $a\in\overline{(a,b)}$. 若 $\exists\ c>a$ s.t. $(a,c)=\varnothing$,则 $(\leftarrow,c)\cap(a,b)=\varnothing$,与 $a\in\overline{(a,b)}$ 矛盾. 故 $\forall\ c>a,(a,c)\neq\varnothing$. 同理, $\forall\ c<b,(c,b)\neq\varnothing$.

"$\Leftarrow$" 注意到序拓扑的一个基是由所有形如 (a_1,b_1), $(\leftarrow,b_1)$, $(a_1,\to)$ 的区间构成的. 对任一包含 a 的基元 $B=(a_1,b_1)$ 或 $B=(\leftarrow,b_1)$ 有

$$B\cap(a,b)=(a,b_1)\cap(a,b)=\begin{cases}(a,b_1) & b_1\leqslant b,\\ (a,b) & b_1\geqslant b.\end{cases}$$

若包含 a 的基元 $B=(a_1,\to)$,则 $B\cap(a,b)=(a,b)$.

无论怎样,由假设条件得 $B\cap(a,b)\neq\varnothing$,故 $a\in\overline{(a,b)}$.

同理可得 $b\in\overline{(a,b)}$.

所以有

$$\overline{(a,b)}=[a,b].$$

(3) X 的序拓扑记为 τ, S 的子空间拓扑记为 τ_S, S 的序拓扑记为 τ_O.

设 $B\subset S$ 为 τ_O 的子基元，比如 $B=\{x\in S\mid x<b\}$. 其中 $b\in S$,则 $B=\{x\in X\mid x<b\}\cap S\in\tau_S$. 所以 $\tau_O\subset\tau_S$.

易见 τ 的每个子基元与 S 之交组成 τ_S 的一个子基．现设 S 为区间，我们证 τ_S 的上述子基的任一元都属于 τ_O. 不妨设 τ_S 的任一子基元为 $B=\{x\in X\mid x<b\}\cap S=\{x\in S\mid x<b\}$，其中 $b\in X$. 还不妨假定 $B\neq\varnothing$，$B\neq S$. 要证 $B\in\tau_O$，只需证$\exists\ c\in S$ 使 $B=\{x\in S\mid x<c\}$. 若不然，则 $b\notin S$. 由 $B\neq\varnothing$，$\exists\ y\in S$ s.t $y<b$. 又 $B\neq S$，故$\exists\ z\in S$ s.t. $z>b$. 由于 S 为区间，故$[y,z]\subset S$，从而 $b\in S$，导致矛盾．这就证明了 $B\in\tau_O$，于是 $\tau_S\subset\tau_O$，从而 $\tau_S=\tau_O$.

(4) 现若 $S=[0,1)\cup\{2\}\subset\mathbf{R}$，不是 $\mathbf{R}$ 的区间，易见 $\mathbf{R}$ 的序拓扑就是通常拓扑，则

$$\{2\}=(1,3)\cap S\in\tau_S.$$

而 S 的序拓扑 τ_O 的基中包含$\{2\}$的成员只有下述两类：一类即 S 本身，一类是$\{x\in S\mid a<x\leqslant 2\}$，其中 $a\in S$. 显然 $a<1$，故必有 $b\in S$ 使 $a<b<1$，所以 τ_O 的任一包含 2 的基元都不能包含在$\{2\}$内，故$\{2\}\notin\tau_O$，可见 $\tau_S\neq\tau_O$. □

注　以后对于一个拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$的子集 S 而言，如不加申明，总认为它具有子空间拓扑．

1.5.8　在序数集合$[0,\Omega)$与$[0,\Omega]$上均取序拓扑，其中 Ω 为第一不可数序数．则$[0,\Omega)$与$[0,\Omega]$都不是可分的；又$[0,\Omega)$是第一可数的，而$[0,\Omega]$却不是第一可数的．

证　因为$[0,\Omega)$的任一可数子集 A 都有上界 $\beta<\Omega$，由于$[0,\beta]$是可数的，故$(\beta,\Omega)\neq\varnothing$，且$(\beta,\Omega)\cap A=\varnothing$，故 A 在$[0,\Omega)$中不是稠密的，即$[0,\Omega)$不可分，同样地$[0,\Omega]$也不可分(因为$[0,\Omega)$是$[0,\Omega]$的开子空间).

因$\forall\ \alpha\in[0,\Omega)$都有直接后继元，记作 $\alpha+1$，则当 $\alpha\neq 0$ 时，$\{(\beta,\alpha+1)\mid\beta<\alpha\}$就是 α 的可数邻域基，而当 $\alpha=0$ 时，$\{[0,1)\}=\{\{0\}\}$(注意，这里 0,1 都是序数)是 0 的可数邻域基．所以$[0,\Omega)$是第一可数的．

对于$[0,\Omega]$，$\{(\beta_i,\Omega]\}_{i\in\mathbf{N}}$为 Ω 的任一可数邻域族，由于 $B=\{\beta_i\}_{i\in\mathbf{N}}$有上界 $\beta<\Omega$，于是 Ω 的邻域$(\beta+2,\Omega]$就不包含任一$(\beta_i,\Omega]$，所以 Ω 没有可数的邻域基．即$[0,\Omega]$不是第一可数的． □

注　以后无特别申明，序数空间，总是取序拓扑．

1.5.9　设在 $X=[0,1]\times[0,1]$上取在字典序之下的序拓扑．试求下述子集在这个拓扑下的闭包：

$$A=\{\langle\frac{1}{n},0\rangle\mid n\in\mathbf{N}\},$$

$$B=\{\langle x,0\rangle\mid 0<x<1\},$$

$$C=\{\langle\frac{1}{2},y\rangle\mid 0<y<1\}.$$

解

$$\bar{A}=A\cup\{\langle 0,1\rangle\},$$
$$\bar{B}=B\cup\{\langle x,1\rangle\mid 0\leqslant x<1\}\cup\{\langle 1,0\rangle\},$$
$$\bar{C}=C\cup\{\langle\frac{1}{2},0\rangle,\langle\frac{1}{2},1\rangle\}=\{\langle\frac{1}{2},y\rangle\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$ □

1.5.10　设 $X=A\cup B$，其中 A,B 均非空，$A\cap B=\varnothing$，$\forall\ x\in X$，令

$$\mathscr{N}(x) = \begin{cases} \{U \subset X \mid x \in U\} & 若\ x \in A, \\ \{U \subset X \mid B \subset U\} & 若\ x \in B. \end{cases}$$

(1) 证明存在 X 的拓扑 τ 使每个 $\mathscr{N}(x)$ 为点 x 的邻域系，并求这个拓扑 τ.

(2) 讨论子集 A,B 在 τ 之下的开闭性.

(3) 证明 $\langle X,\tau\rangle$ 是第一可数的.

(4) 讨论 $\langle X,\tau\rangle$ 的可分性，Lindelöf 性，第二可数性.

解 (1) 我们只要验证 $\{\mathscr{N}(x) \mid x\in X\}$ 满足[N. 1]－[N. 4]. [N. 1]－[N. 3]是显然的.

若 $x\in A, U\in\mathscr{N}(x)$，则取 $V=U\cap A$；若 $x\in B, U\in\mathscr{N}(x)$，则可取 $V=U$ 就合[N. 4]的要求. 所以可用 $\{\mathscr{N}(x) \mid x\in X\}$ 的元为对应点的邻域系诱导 X 的拓扑 τ. 且

$$\begin{aligned} \tau &= \{G \subset X \mid \forall\ x \in G, G \in \mathscr{N}(x)\} \\ &= \{G \subset X \mid G \subset A\ 或\ B \subset G\}. \end{aligned}$$

(2) 由 $\mathscr{N}(x)$ 的定义可见，A 与 B 都是自身每一点的邻域，故都是开集. 从而 A 与 B 都是既开又闭的.

(3) $\forall\ x\in A$，$\{\{x\}\}$ 是 x 的邻域基，$\forall\ x\in B$，$\{B\}$ 是 x 的邻域基. 所以 $\langle X,\tau\rangle$ 是第一可数的.

(4) 如果 X 可分，则存在可数稠密子集 D. $\forall\ x\in A$，便有 $\{x\}\cap D\neq\varnothing$，即 $x\in D$，所以 $A\subset D$，故 A 可数.

反过来，如果 A 可数，取 $b\in B$，则 $D \overset{\text{def}}{=\!=} A\cup\{b\}$ 可数，且 $\forall\ x\in B$ 以及 $U\in\mathscr{N}(x)$，由于 $B\subset U$，故 $U\cap D\neq\varnothing$，从而 $x\in\overline{D}$，即 $B\subset\overline{D}$，所以 $\overline{D}=A\cup B=X$，从而 X 可分.

因此，X 可分 $\Leftrightarrow A$ 可数.

类似地可得 X 是 Lindelöf 的 $\Leftrightarrow A$ 可数 $\Leftrightarrow X$ 是第二可数的. □

注 虽然我们很容易地得到了 τ 的具体形式，但(2)，(3)，(4)的讨论都可直接从邻域系出发. 有时候 τ 的具体形式不易表达，但只要有了定义拓扑所用的拓扑基(子基)，邻域系或邻域基，也就足够了.

1.5.11 设 $X=(\mathbf{N}\cup\{0\})\times(\mathbf{N}\cup\{0\})$，当 $\langle m,n\rangle\neq\langle 0,0\rangle$ 时，令

$$\mathscr{B}(\langle m,n\rangle) = \{\{\langle m,n\rangle\}\},$$

令 $\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)$ 由一切满足下述条件的 $U\subset X$ 组成：

(i) $\langle 0,0\rangle\in U$，

(ii) $\mathscr{C}U$ 至多包含 X 的有限个列以及其余每一列的有限个元.

(1) 验证 $\{\mathscr{B}(\langle m,n\rangle) \mid \langle m,n\rangle\in X\}$ 满足开邻域基的公理[NB. 1]，[NB. 2]，[NB. 3]′. 于是以 $\mathscr{B}(\langle m,n\rangle)$ 为相应点 $\langle m,n\rangle$ 的开邻域基诱导一个拓扑 τ.

(2) 证明不存在 $X-\{\langle 0,0\rangle\}$ 中的序列收敛于 $\langle 0,0\rangle$.

(3) 将 $X-\{\langle 0,0\rangle\}$(可数无限)的元任意编号构成的序列 $\langle x_k\rangle_k$ 都有接触点 $\langle 0,0\rangle$.

证 (1) [NB. 1]显然成立，对[NB. 2]只需考虑 $U_1,U_2\in\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)$ 的情形. 显然 $\langle 0,0\rangle\in U_1\cap U_2$，又 $\mathscr{C}(U_1\cap U_2)=(\mathscr{C}U_1)\cup(\mathscr{C}U_2)$，故 $\mathscr{C}(U_1\cap U_2)$ 也至多包含 X 的有限个列以及其余每一列的有限个元. 即 $U_1\cap U_2\in\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)$，故[NB. 2]成立. 对于[NB. 3]′，当 $\langle m,n\rangle\neq\langle 0,0\rangle$ 时，只有一个成员 $\{\langle m,n\rangle\}\in\mathscr{B}(\langle m,n\rangle)$，又只有一个点 $\langle m,n\rangle\in\{\langle m,n\rangle\}$，当然满足

所需条件，而对于 $U\in\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)$ 以及 $\forall\ \langle m,n\rangle\in U$. 若 $\langle m,n\rangle\neq\langle 0,0\rangle$，则有 $\{\langle m,n\rangle\}\in\mathscr{B}(\langle m,n\rangle)$ 使 $\{\langle m,n\rangle\}\subset U$. 当 $\langle m,n\rangle=\langle 0,0\rangle$ 时，则取 U 本身即可，所以[NB. 3]′成立．

(2) 设 $\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 是 $X-\{\langle 0,0\rangle\}$ 中的序列，记

$$A=\{x_k\mid k\in\mathbf{N}\},$$

$$M=\{m\in\mathbf{N}\cup\{0\}\mid\exists\ n\ \text{s.t.}\ \langle m,n\rangle\in A\}.$$

若 M 有限，则 $X-A\in\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)$. 所以 $\langle 0,0\rangle$ 不是 $\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 的极限点．

如果 M 无限，$\forall\ m\in M$ 取定一个 $n(m)\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 使 $\langle m,n(m)\rangle\in A$，则

$$B=\{\langle m,n(m)\rangle\mid m\in M\}$$

也是无限集．令 $U=X-B$ 易见 $U\in\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)$. 且 $\forall\ k\in\mathbf{N}$，$\{x_{k'}\mid k'\leqslant k\}$ 是有限集而 B 无限．故必 $\exists\ k'>k$ 使 $x_{k'}=\langle m,n(m)\rangle\in B$，即 $x_{k'}\notin U$. 所以 $\langle 0,0\rangle$ 不是 $\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 的极限点．

(3) $\forall\ U\in\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)$ 以及 $\forall\ k\in\mathbf{N}$. 由 U 满足的条件 (ii) 可知 $\exists\ m_0$ s.t. $\forall\ m>m_0$，$\{n\mid\langle m,n\rangle\in U\}$ 为无限集．再令 $m_1=\max\{m\mid\exists\ n\ \text{s.t.}\ \langle m,n\rangle=x_{k'}$ 且 $k'\leqslant k\}$. 于是当 $m>\max\{m_0,m_1\}$ 时，$\exists\ n$ s.t. $\langle m,n\rangle\in U$ 且 $\langle m,n\rangle$ 在序列中的编号 $k'>k$. 即 $\exists\ k'>k$ s.t. $x_{k'}=\langle m,n\rangle\in U$，这就证明了 $\langle 0,0\rangle$ 是 $\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 的接触点． □

注　综合(2)与(3)可见 $\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 有接触点 $\langle 0,0\rangle$，但 $\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 的任一子序列都不收敛于 $\langle 0,0\rangle$. 这就给出了 A1.3.4(3)对于一般的拓扑空间未必成立的一个反例．

（二）　常见错误分析

1.5.12　设 $\{\langle X_i,\rho_i\rangle\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为一族度量空间，ρ 为 $X=\coprod_{i=1}^{n}X_i$ 上的积度量，即 $\forall\ x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle,y=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle,\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\rho_i(x_i,y_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 记 τ_i 为 X_i 上由 ρ_i 诱导的拓扑 $(i=1,2,\cdots,n)$，τ_ρ 为 X 上 ρ 诱导的拓扑，证明 X 的子集族

$$\mathscr{B}\doteq\left\{\coprod_{i=1}^{n}G_i\mid\forall\ i,G_i\in\tau_i\right\}$$

是积度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 的拓扑基．

因为 $X_i\in\tau_i(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $X=\coprod_{i=1}^{n}X_i\in\mathscr{B}$，当然有 $\bigcup\mathscr{B}=X$，即 $\mathscr{B}$ 满足[B. 1].

又若 $B_j=\coprod_{i=1}^{n}G_i^{(j)}\in\mathscr{B},(j=1,2),x\in B_1\cap B_2=\coprod_{i=1}^{n}\left(G_i^{(1)}\cap G_2^{(2)}\right)$，令 $G_i=G_i^{(1)}\cap G_i^{(2)}$，则 $G_i\in\tau_i(\forall\ i)$，取 $B=\coprod_{i=1}^{n}G_i$，则 $B\in\mathscr{B}$ 且 $x\in B=B_1\cap B_2$，所以[B. 2]成立．从而 $\mathscr{B}$ 是 $\langle X,\rho\rangle$ 的拓扑基．

试判断上述证明正确与否，理由何在？

分析　验证了 $\mathscr{B}$ 满足拓扑基的公理[B. 1]，[B. 2]，于是可由 $\mathscr{B}$ 作为拓扑基生成 X 的拓扑 τ，$\mathscr{B}$ 正是这个 τ 的基．

而 $\langle X,\rho\rangle$ 作为度量空间已有一个自然的拓扑 τ_ρ，原题的意思就是要证 $\mathscr{B}$ 是拓扑 τ_ρ 的基．

现在我们没有理由说 τ 就是 τ_ρ. 也许有的初学者会申辩说:由于 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑是唯一的,所以由唯一性可得 $\tau=\tau_\rho$. 看来似乎有道理,殊不知定理中的这个唯一性非常明确地指明对于以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑而言的,即若 τ_ρ 也是以 $\mathscr{B}$ 为基(这恰好是原题要我们证明的结果!),则由唯一性可得 $\tau=\tau_\rho$. 定理 A1.5.2 并没有说 X 上原先给定的任意一个拓扑都等于满足条件[B.1],[B.2]的任一子集族所诱导的拓扑. 前面我们已经看到在 $\mathbf{R}$ 上由子集族

$$\mathscr{B}_S=\{[a,b)\mid a,b\in\mathbf{R},a<b\} \text{ 与 } \mathscr{B}_{r_0}=\{(a,+\infty)\mid a\in\mathbf{R}\}$$

所诱导的拓扑 τ_S,τ_{r_0}就与 $\mathbf{R}$ 上通常的拓扑不同. $\mathscr{B}_S$ 仅仅是 τ_S 的基,而不是别的拓扑的基,$\mathscr{B}_{r_0}$也只是 τ_{r_0}的基,尽管 $\mathscr{B}_S$ 与 $\mathscr{B}_{r_0}$都满足条件[B.1],[B.2]. 但它们分别是不同拓扑的基. 读者必须清楚拓扑基 $\mathscr{B}$ 总是相对于某个拓扑而言的. 一个拓扑可以有几个不同的基,甚至还可以有无限多个基,但反过来,$\mathscr{B}$ 若是拓扑 τ 的基,就决不会是另一个拓扑 τ' 的基,这就是 A1.5.2 中的唯一性. 如果 X 上已经有了某个拓扑 τ^*(比如这里是 τ_ρ),要证明 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 是它的基,则必须验证 $\mathscr{B}$ 满足 A1.3.1 定义中的条件! 本题正确的证明如下:

首先$\forall\ B=\prod_{i=1}^{n}G_i\in\mathscr{B},x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\in B$,由于$\forall\ i,x_i\in G_i\in\tau_i$,故$\exists\ \varepsilon_i>0$ s.t. $B_{\rho_i}(x_i,\varepsilon_i)\subset G_i$. 令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,则 $\varepsilon>0$ 且$\forall\ y=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle\in B_\rho(x,\varepsilon)$有

$$\rho_i(x_i,y_i)\leqslant\rho(x,y)<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i,$$

故 $y_i\in B_{\rho_i}(x_i,\varepsilon_i),i=1,2,\cdots,n$. 从而

$$B_\rho(x,\varepsilon)\subset\prod_{i=1}^{n}B_{\rho_i}(x_i,\varepsilon_i)\subset B.$$

于是 $B\in\tau_\rho$,从而 $\mathscr{B}\subset\tau_\rho$.

再者$\forall\ G\in\tau_\rho$ 以及 $x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\in G$,$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$. 取 $\delta=\varepsilon/\sqrt{n}$,由于 $B_{\rho_i}(x_i,\delta)\in\tau_i$,故 $B=\prod_{i=1}^{n}B_{\rho_i}(x_i,\delta)\in\mathscr{B}$,且$\forall\ y=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle\in B$,

$$\rho(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\rho_i(x_i,y_i))^2\Big)^{\frac{1}{2}}<(n\delta^2)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon.$$

所以 $x\in B\subset B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$.

综上可知 $\mathscr{B}$ 为拓扑 τ_ρ 的基. □

1.5.13　设 X 为非空集,映射 $d:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$叫做导集算子,满足下述导集公理:$\forall\ A,B\in\mathscr{P}(X)$

[D.1]　$d(\varnothing)=\varnothing$,

[D.2]　$d(d(A))\subset A\cup d(A)$,

[D.3]　$d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$,

[D.4]　$x\in d(A)\Rightarrow x\in d(A-\{x\})$.

则存在 X 的唯一的拓扑 τ,使在 τ 之下,$\forall\ A\in\mathscr{P}(A)$有 $A'=d(A)$.

证　令 $\sigma=\{F\subset X\mid d(F)\subset F\}$.

由[D.1]得$\varnothing\in\sigma$,又 $d(X)\subset X$ 显然,故 $X\in\sigma$. 即[C.1]成立.

若 $F_1,F_2\in\sigma$,则 $d(F_i)\subset F_i(i=1,2)$. 由[D.3],

$$d(F_1\cup F_2)=d(F_1)\cup d(F_2)\subset F_1\cup F_2,$$

故 $F_1\cup F_2\in\sigma$，即[C. 2]成立．

若 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\sigma$，则 $\forall\ \lambda\in\Lambda, d(F_\lambda)\subset F_\lambda$. 由[D. 3] $\forall\ \mu\in\Lambda, d(F_\mu)=d(F_\mu\cup(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda))$ $=d(F_\mu)\cup d(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda)$，所以

$$d(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda)\subset d(F_\mu)\subset F_\mu, (\forall\ \mu\in\Lambda),$$

于是

$$d(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda)\subset\bigcap_{\mu\in\Lambda}F_\mu=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda,$$

故 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\sigma$，即[C. 3]成立．从而由 σ 为余拓扑，决定 X 的一个拓扑 τ，使在 τ 之下，σ 恰好是 X 的全体闭集．

下证在 τ 之下对每个 $A\subset X, A'=d(A)$.

容易验证由 A 到 A' 的对应也满足[D. 1]－[D. 4]. 所以这个对应也是导集算子，从而 $A'=d(A)$.

试分析上述证明有何错误．

分析　上述证明的前一部分是正确的．后一部分则是错误的．因为一个子集的导集是与拓扑有关的，在给定一个拓扑 τ 后，由 A 到 A' 的对应确定了一个导集算子．如果再给出另一个拓扑 τ^*，在这个拓扑下，子集 A 的导集记作 A^*，它当然完全可以不等于在 τ 之下的导集 A'，尽管由 A 到 A^* 的对应也确定一个导集算子．所以 $\mathscr{P}(X)$ 上可以存在许许多多导集算子，因此没有理由根据 $A\mapsto A'$ 与 $A\mapsto d(A)$ 同样是导集算子就断定 $A'=d(A)$. 正确的证明应该是：

先证 $\forall\ S\subset X$，在 σ 为余拓扑决定的拓扑 τ 之下，$\overline{S}=S\cup d(S)$. 由于

$$d(S\cup d(S))=d(S)\cup dd(S)\subset S\cup d(S),$$

故 $S\cup d(S)\in\sigma$，即 $S\cup d(S)$ 是闭集，从而

$$\overline{S}\subset S\cup d(S).$$

又因 $\overline{S}\in\sigma$，故 $d(\overline{S})\subset\overline{S}$，于是

$$S\cup d(S)\subset\overline{S}\cup d(\overline{S})=\overline{S}$$

所以

$$\overline{S}=S\cup d(S).$$

再证 $\forall\ A\subset X, A'=d(A)$.

$$x\in A'\Rightarrow x\in(A-\{x\})'\subset\overline{A-\{x\}}=(A-\{x\})\cup d(A-\{x\}).$$

所以

$$x\in d(A-\{x\})\subset d(A).$$

反之，

$$x\in d(A)\Rightarrow x\in d(A-\{x\})\subset\overline{A-\{x\}},$$

即

$$x\in(A-\{x\})\cup(A-\{x\})',$$

所以 $x\in(A-\{x\})'\subset A'$. 于是 $A'=d(A)$. □

C 练习题

1.5.1 设 $\mathbf{R}$ 的子集族

$\mathscr{B}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R},a<b\}$， $\mathscr{B}_1=\{[a,b)\mid a,b\in\mathbf{R},a<b\}$，

$\mathscr{B}_2=\{(a,b]\mid a,b\in\mathbf{R},a<b\}$， $\mathscr{B}_3=\{(-\infty,a)\mid a\in\mathbf{R}\}$，

$\mathscr{B}_4=\{(a,+\infty)\mid a\in\mathbf{R}\}$， $\mathscr{B}_5=\{B\subset\mathbf{R}\mid \mathbf{R}-B$ 有限$\}$.

(1) 验证它们都满足条件[B.1]，[B.2]，设分别由它们为基生成的拓扑是 $\tau,\tau_i(i=1,2,3,4,5)$.

(2) 设 $S=\{\pm(1-\frac{1}{n})\mid n\in\mathbf{N}\}$，求 S 在拓扑 τ,τ_i 之下的闭包.

1.5.2 证明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的基 $\mathscr{B}$ 也是 $\langle X,\tau\rangle$ 的拓扑子基.

1.5.3 证明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 是第二可数的 $\Leftrightarrow\langle X,\tau\rangle$ 有一个可数的子基.

1.5.4 设 X 为无限集，$\mathscr{S}=\{X-\{x\}\mid x\in X\}$，证明以 $\mathscr{S}$ 为子基生成的 X 的拓扑是有限补拓扑.

1.5.5 设 $X=\{1,2,3\}$，令 $\tau_1=\{\varnothing,X,\{1\},\{1,2\}\}$，$\tau_2=\{\varnothing,X,\{1\},\{2,3\}\}$，则 τ_1,τ_2 都是 X 的拓扑. 求 $\tau_1\vee\tau_2$ 与 $\tau_1\wedge\tau_2$.

1.5.6 设在 $X=[0,1]\times[0,1]$ 上，取在字典序之下的序拓扑. 求在这个拓扑下，下述子集的闭包：

$$A=\{\langle 1-\frac{1}{n},\frac{1}{2}\rangle\mid n\in\mathbf{N}\},$$

$$B=\{\langle x,x\rangle\mid 0<x<1\},$$

$$C=\{\langle x,\frac{1}{2}\rangle\mid 0<x<1\}.$$

1.5.7 设 $\mathbf{R}$ 的子集族 $\mathscr{B}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R},a<b\}$，$\mathscr{B}_1=\mathscr{B}\cup\{B-K\mid B\in\mathscr{B}\}$，其中 $K=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbf{N}\}$. 验证 $\mathscr{B}_1$ 满足[B.1]，[B.2]. 并将 $\mathbf{R}$ 上由 $\mathscr{B}_1$ 为基生成的拓扑 τ_1 与通常拓扑 τ，右半开区间拓扑 τ_S，右序拓扑 τ_{ro}，有限补拓扑 τ_f 加以比较.

1.5.8 设 $A=\{\pm\frac{1}{n}\mid n\in\mathbf{N}\}$，$\forall\ x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}$，令

$$U_n(x)=(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}),$$

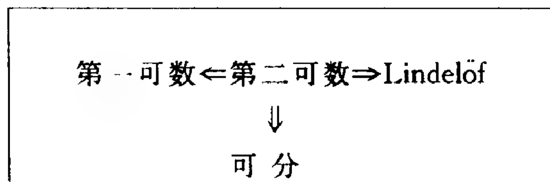
$$\mathscr{B}(x)=\begin{cases}\{U_n(0)-A\mid n\in\mathbf{N}\} & x=0,\\ \{U_n(x)\mid n\in\mathbf{N}\} & x\neq 0.\end{cases}$$

(1) 证明存在 $\mathbf{R}$ 的拓扑 τ_2 使每个 $\mathscr{B}(x)$ 恰为 x 的邻域基. 并将 τ_2 与上题的 τ_1 作比较.

(2) 求 A 与上题中的 K 在 $\langle\mathbf{R},\tau_1\rangle$ 与 $\langle\mathbf{R},\tau_2\rangle$ 中的闭包.

1.5.9 证明不可数的排外点拓扑空间 $\langle X,\tau_e\rangle$(B1.5.5)是第一可数的，Lindelöf 的，不是可分的.

现将可数性间的关系总结如下：



在度量空间中：

可分⇔第二可数⇔Lindelöf.

对一般的空间有反例表如右：

1. 不可分的度空间(B1.3.6(2),C1.3.4 ⟨B, ρ⟩).

2. 不可数的特殊点拓扑空间(B1.3.2).

3. 不可数的排外点拓扑空间(C1.5.9).

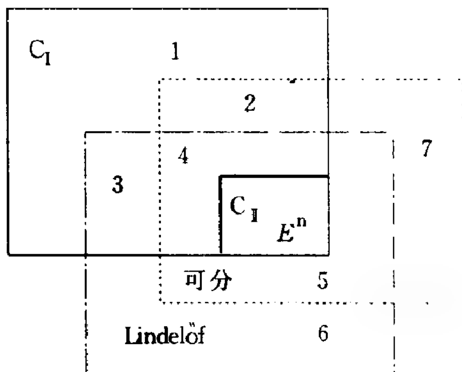
4. Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$(B1.5.6).

5. 不可数的有限补拓扑空间(B1.3.3).

6. 不可数的 Fort 空间(B1.5.5).

7. $[0,\Omega)\times I^I$ 的闭扩张(B6.1.10 与 B1.4.1 结合).

表1.5.1



注 C_I,C_{II}分别表示第一,二可数性.

§1.6 连续映射与同胚映射

A 内容提要

1.6.1 定义 设⟨X,τ_X⟩,⟨Y,τ_Y⟩为拓扑空间,映射 $f:X\to Y$ 在点 $x\in X$ 处连续定义为 $\forall V\in\mathcal{N}_Y(f(x))$(等价地,$\forall V\in\mathcal{N}_Y(f(x))\cap\tau_Y$ 或对 $f(x)$的某邻域基中的任一成员 V) $\exists U\in\mathcal{N}_X(x)$ s.t. $f(U)\subset V$.

如果 f 在 X 的每一点处都连续,则说 f 连续.

注 从现在开始,若无特别申明,字母 X,Y 总是表示拓扑空间⟨X,τ_X⟩,⟨Y,τ_Y⟩.

1.6.2 定理 设 $f:X\to Y$,则下述条件都等价:

(1) f 连续.

(2) $\forall A\subset X, f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

(3) Y 中任一闭集 F 的原像 $f^{-1}(F)$是 X 的闭集.

(4) Y 中任一开集 G 的原像 $f^{-1}(G)$是 X 的开集.

(5) ⟨Y,τ_Y⟩的某个子基(或基)中的任一成员 G 的原像 $f^{-1}(G)$是 X 的开集.

易见连续映射的复合映射是连续映射，连续映射在子空间上的限制是连续映射．

1.6.3 定理　若 X 第一可数则 $f: X\to Y$ 连续的充要条件是 $\forall x\in X$ 以及每个收敛到 x 的序列 $\langle x_n\rangle_{n\in \mathbf{N}}$ 都有 Y 的序列 $\langle f(x_n)\rangle_{n\in \mathbf{N}}$ 收敛到 $f(x)$.

1.6.4（粘合引理）　设 F_1,F_2 都是 X 的闭(开)子空间，如果 $f_i: F_i\to Y$ 连续 $(i=1,2)$ 且 $f_1|_{F_1\cap F_2}=f_2|_{F_1\cap F_2}$，则由

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in F_1, \\ f_2(x) & x\in F_2 \end{cases}$$

定义的映射 $f: X\to Y$ 连续．

1.6.5 定义　如果 $f: X\to Y$ 把 X 的开集(相应地，闭集)映成 Y 的开集(相应地，闭集)就叫 f 为开(相应地，闭)映射．

如果 $h: X\to Y$ 是一一的，连续的且 h^{-1} 也连续则称 h 为同胚映射．如果存在同胚映射 $h: X\to Y$，则说 X 与 Y 是同胚的空间．被同胚映射保持的性质叫拓扑性质．

如果 $f: X\to Y$ 被视为由 X 到 Y 的子空间 $f(X)$ 的映射是同胚映射，则说 $f: X\to Y$ 是嵌入．

1.6.6 定理　如果 $f: X\to Y$ 是一一映射，则下述条件等价：

(1) f 是同胚映射．

(2) f 是连续的开映射．

(3) f 是连续的闭映射．

(4) $\forall A\subset X, f(\overline{A})=\overline{f(A)}$.

1.6.7 定理　拓扑空间的可分性，Lindelöf 性能被连续映射保持．第一(二)可数性能被连续的开映射保持．所以它们都是拓扑性质．

B　例题

(一)

在这一节中应注意连续映射，开映射，闭映射，嵌入映射与同胚映射之间的区别与联系，要善于应用连续映射的几个等价条件．

1.6.1　设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间，在 $X\times X$ 上取 Σ 度量 ρ_Σ，证明 $\rho: X\times X\to E^1$ 连续．

注　设 $\langle X_i,\rho_i\rangle, i=1,2,\cdots,n$，为 n 个度量空间，$\forall x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle, y=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle \in \prod_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{def}}{=\!=} X$. 令

$$\rho_p(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\rho_i(x_i,y_i))^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho_m(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\rho_i(x_i,y_i)\},$$

$$\rho_\Sigma(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i,y_i).$$

不难验证 $\rho_p,\rho_m,\rho_\Sigma$ 都是 $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ 的度量．依次叫做积度量，极大度量，Σ-度量．并由 $\rho_m(x,y)\leqslant\rho_p(x,y)\leqslant\rho_\Sigma(x,y)\leqslant n\rho_m(x,y)$ 可见 $\rho_p,\rho_m,\rho_\Sigma$ 是等价的度量．

证　对 $X\times X$ 中任意一点 $\langle x,y\rangle$ 以及 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，那么 $\forall\ \langle x',y'\rangle\in X\times X$，只要

$$\rho_\Sigma(\langle x,y\rangle,\langle x',y'\rangle)<\delta=\varepsilon$$

即

$$\rho(x,x')+\rho(y,y')<\varepsilon$$

就有

$$\begin{aligned}|\rho(x,y)-\rho(x',y')|&=|\rho(x,y)-\rho(x',y)|+|\rho(x',y)-\rho(x',y')|\\&\leqslant\rho(x,x')+\rho(y,y')<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 ρ 连续． □

注　解这一题的关键是要搞清楚 ρ 与 ρ_Σ 的含义及两者之间的关系．我们要证明的是 ρ 作为映射 $\rho: X\times X\to E^1$ 连续．这当然要用到 $X\times X$ 上的度量 ρ_Σ 以及 ρ 本身作为 X 上的度量所具有的性质．

又由于 ρ_m,ρ_p 与 ρ_Σ 是等价的，即它们诱导相同的拓扑，而映射连续性的概念，据定义只与拓扑有关，所以在 $X\times X$ 上取 ρ_m 与 ρ_p 时，ρ 也连续．

1.6.2　设 $\langle\mathbf{R}^n,\rho_m\rangle$ 为度量空间，其中 ρ_m 为 $\mathbf{R}^n$ 的极大度量．$f: X\to\mathbf{R}^n$，$\forall\ x\in X$，记 $f(x)=\langle f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)\rangle$．证明 f 连续 $\Leftrightarrow\forall\ i,f_i: X\to E^1$ 连续．将 $\langle\mathbf{R}^n,\rho_m\rangle$ 换成 E^n 结论是否成立？举例说明哪些熟悉的结果是本题的特例．

证　假定 f 连续，由于 $f_i=p_i\circ f$，其中 $p_i:\mathbf{R}^n\to E^1$ 是第 i 个投影($\forall\ i=1,2,\cdots,n$)．由于 $\forall\ x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\in\mathbf{R}^n$ 以及 $\varepsilon>0$，只要 $\rho_m(x,y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|<\varepsilon$，显然就有 $\forall\ i,|x_i-y_i|<\varepsilon$．所以 p_i 连续．从而 f_i 连续．

反过来，假定 $\forall\ i,f_i$ 都连续，$\forall\ x\in X$ 以及 $\varepsilon>0$，$\exists\ U_i\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $\forall\ y\in U_i$，$|f_i(y)-f_i(x)|<\varepsilon$，取 $U=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\in\mathscr{N}(x)$，则当 $y\in U$ 时

$$\rho_m(f(y),f(x))=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|f_i(y)-f_i(x)|\}<\varepsilon.$$

所以 f 连续．

由于 E^n 的度量就是 n 个 E^1 的积度量 ρ_p，而 ρ_m 与 ρ_p 等价．所以将 $\langle\mathbf{R}^n,\rho_m\rangle$ 换成 E^n 结论仍然成立．

视 $f: E^2\to E^2$ 为 $\forall\ x\in E^2$ 确定一个平面向量 $\langle f_1(x),f_2(x)\rangle$，则 f 表示平面向量场，于是本题的结论用到这里正是：平面向量场是连续场的充要条件为由每个分量构成的纯量场都连续．将 E^2 换成 E^3 就是空间向量场的连续性条件．

视 $f: E^1\to E^2$ 为 $\forall\ t\in E^1$ 确定平面上一点 $\langle f_1(t),f_2(t)\rangle$，改写成 $\langle x(t),y(t)\rangle$，那么 f 就确定了一个单参数平面曲线(也可用 E^1 的区间代替 E^1)．所以，“单参数平面曲线连续的充要条件是坐标函数 $x(t),y(t)$ 都连续”这一事实也是本题的特例．

又视 $f: E^2\to E^2$ 为由复数平面到复数平面的复变函数，记 $z=x+iy\in E^2$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in E^2$．那么“复变函数 f 连续的充要条件是它的实部与虚部都连续”这一结果也是本题的特例．

此外在《数学分析》中还有向量值函数，空间曲线，空间曲面等的连续性条件都是本题的特例．本例在积空间中还将进一步得到推广（见 B1.7.9 及其注）． □

1.6.3 设 $f: X\to Y$ 为单射．证明 f 是嵌入 $\Leftrightarrow$ X 的拓扑 τ_X 是使 f 为连续的最小拓扑．

证 “$\Rightarrow$” 设 $\hat{f}: X\to f(X), x\mapsto f(x)$. 因 f 是嵌入．故 $\hat{f}$ 是同胚，假定 X 上另有一个拓扑 τ' 也使 $f: X\to Y$ 连续．

$\forall\, G\in\tau_X$，$f(G)=\hat{f}(G)$ 开于 $f(X)$，所以 $\exists\, G^*\in\tau_Y$ s.t. $f(G)=G^*\cap f(X)$. 于是 $f^{-1}f(G)=f^{-1}(G^*)\in\tau'$，又 f 为单射，所以 $G=f^{-1}f(G)\in\tau'$. 于是 $\tau_X\subset\tau'$. 即 τ_X 是使 f 连续的最小拓扑．

“$\Leftarrow$” 设 $G\in\tau_X$，由假设条件知 $\tau_X=\{f^{-1}(G^*)\,|\,G^*\in\tau_Y\}$. 故$\exists\, G^*\in\tau_Y$ s.t. $G=f^{-1}(G^*)=f^{-1}(G^*\cap f(X))$. 所以

$$f(G)=G^*\cap f(X)$$

开于 $f(X)$. 现令

$$\hat{f}: X\to f(X), x\mapsto f(x).$$

则 $\hat{f}$ 是一一的，连续的．又$\forall\, G\in\tau_X$，$\hat{f}(G)=f(G)$开于 $f(X)$，故 $\hat{f}$ 是开映射，从而是同胚，即 $f: X\to Y$ 是嵌入． □

1.6.4 设 D 为 X 的稠密子集，$\langle Y,\rho\rangle$ 为度量空间，$f,g: X\to Y$ 都连续．证明：如果 $f|_D=g|_D$，则 $f=g$.

证 若 $f\neq g$，则$\exists\, x\in X$ s.t. $f(x)\neq g(x)$. 令

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\rho(f(x),g(x)),\quad V_1=B_\rho(f(x),\varepsilon),\quad V_2=B_\rho(g(x),\varepsilon).$$

则 $V_1\cap V_2=\varnothing$，由于 f,g 都连续．故$\exists\, U_1,U_2\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. $f(U_1)\subset V_1$，$g(U_2)\subset V_2$. 因 $U_1\cap U_2\in\mathscr{N}_X(x)$，$x\in\overline{D}$，所以$(U_1\cap U_2)\cap D\neq\varnothing$. 设 $y\in U_1\cap U_2\cap D$，则

$$f(y)=g(y)\text{ 且 } f(y)\in V_1, g(y)\in V_2,$$

从而 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$，导致矛盾．所以 $f=g$. □

1.6.5 证明：如果 $f: E^1\to E^1$ 连续，且$\forall\, x,y\in E^1$

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

则必$\exists\, a\in\mathbf{R}$ s.t. $\forall\, x\in E^1$，$f(x)=ax$.

证 令

$$g: E^1\to E^1, x\mapsto f(1)x,$$

则 g 连续．

首先，$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$.

其次，$\forall\, x\in E^1$，$f(-x)+f(x)=f((-x)+x)=f(0)=0$. 故

$$f(-x)=-f(x).$$

现当 $x\in\mathbf{Q}-\{0\}$时，$\exists\, p\in\mathbf{Z}-\{0\}$，$q\in\mathbf{N}$ s.t. $x=\dfrac{p}{q}$，则

$$g(x)=g\left(\frac{p}{q}\right)=f(1)\cdot\frac{p}{q}=f(\underbrace{1/q+\cdots+1/q}_{q\text{ 项}})\cdot\frac{p}{q}$$

$$= p \cdot f(\frac{1}{q}) = f(\frac{p}{q}) = f(x).$$

又

$$g(0) = f(1) \cdot 0 = 0.$$

所以

$$f|_{\mathbf{Q}} = g|_{\mathbf{Q}}.$$

故由上题的结果知 $f=g$. 取 $a=f(1)\in\mathbf{R}$,便有$\forall x\in E^1$,

$$f(x) = g(x) = f(1) \cdot x = ax. \qquad \square$$

1.6.6 设 Y 为全序集,τ_Y 为序拓扑,$f,g: X\to Y$ 都连续.

(1) 证明 $F \xlongequal{\text{def}} \{x\in X \mid f(x)\leqslant g(x)\}$是 X 的闭集.

(2) 由 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$,$k(x)=\max\{f(x),g(x)\}$定义的 $h,k: X\to Y$ 都连续.

证 (1) 设 $x\in \mathscr{C}F$,则 $g(x)<f(x)$.

若不存在 $c\in Y$ s.t. $g(x)<c<f(x)$,则取

$$U = (\leftarrow, f(x)),\ V = (g(x), \rightarrow);$$

若$\exists\, c\in Y$ s.t. $g(x)<c<f(x)$,则取

$$U = (\leftarrow, c),\ V = (c, \rightarrow).$$

于是 $U\in \mathscr{N}_Y(g(x))\cap\tau_Y$,$V\in\mathscr{N}_Y(f(x))\cap\tau_Y$,且 $U\cap V=\varnothing$. 由于 f,g 都连续,故 $g^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)\in\mathscr{N}_X(x)$. 设 $z\in g^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)$,则 $g(z)\in U$,$f(z)\in V$ 且 $g(z)<f(z)$,于是 $z\in\mathscr{C}F$,故有

$$x \in g^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \subset \mathscr{C}F.$$

这就证明了 $\mathscr{C}F$ 是 X 的开集,即 F 是 X 的闭集.

(2) 令 $F_1=\{x\in X\mid f(x)\leqslant g(x)\}$, $F_2=\{x\in X\mid g(x)\leqslant f(x)\}$,则 F_1,F_2 都是 X 的闭集,$F_1\cup F_2=X$,且

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x\in F_1 \\ g(x) & x\in F_2, \end{cases} \qquad k(x) = \begin{cases} g(x) & x\in F_1 \\ f(x) & x\in F_2. \end{cases}$$

由于$f|_{F_1}, g|_{F_2}, f|_{F_2}, g|_{F_1}$都连续,故由粘合引理知 h,k 都连续. $\square$

注 B1.1.4 是本题(1)的特例. 由(1)的证明还可得$\{x\in X\mid g(x)=f(x)\}=F_1\cap F_2$ 是 X 的闭集.

1.6.7 设$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为 X 的闭集族,且 $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,$f: X\to Y$,$\forall\lambda\in\Lambda$, $f|_{A_\lambda}$连续. 证明:如果$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$局部有限,则 f 连续.

证 [法一] $\forall x\in X$,$\exists\, U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ s.t. $\{\lambda\in\Lambda\mid U\cap A_\lambda\neq\varnothing\}$为有限集,记为$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. 由粘合引理并利用数学归纳法可知$f|_{\bigcup_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}}$连续,从而$f|_U$ 连续(因 $U\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}$). 所以 $\forall V\in\mathscr{N}_Y(f(x))$ $\exists\, W\in\mathscr{N}_U(x)\cap\tau_U\subset\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$(这里 U 作为 X 的开子空间) s.t. $f(W)\subset V$,所以 f 在 x 处连续,由 x 的任意性得 f 连续.

[法二] 设 F 闭于 Y, 则 $\forall\lambda\in\Lambda$, $(f|_{A_\lambda})^{-1}(F)$ 闭于 A_λ, 因 A_λ 是 X 的闭子空间, 故 $(f|_{A_\lambda})^{-1}(F)$也闭于 X, 由于 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$局部有限, 故 $\{(f|_{A_\lambda})^{-1}(F)\}_{\lambda\in\Lambda}$也局部有限, 所以由

B1.2.4 得

$$\overline{f^{-1}(F)} = \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(f|_{A_\lambda})^{-1}(F)} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{(f|_{A_\lambda})^{-1}(F)}$$
$$= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(f|_{A_\lambda})^{-1}(F) = f^{-1}(F).$$

即 $f^{-1}(F)$ 闭于 X，故由 A1.6.2 条件(3)知 f 连续． □

注　当 Λ 为有限集时，直接由粘合引理与数学归纳法可知 f 连续，当 Λ 为可数无限时，下述反例说明 f 不必连续：

令 $X=[0,1]$ 作为 E^1 的子空间，$f: X\to E^1$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

记 $A_0=\{0\}$，$A_n=[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$，则 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}\cup\{0\}}$ 为 $[0,1]$ 的可数的闭集族，且 $X=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$，$\forall\, n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，$f|_{A_n}$ 连续，但 f 不连续．这就说明粘合引理一般不能推广到无限多个闭子空间的情形，而本题的结论又说明对无限多个闭子空间加上局部有限的条件后，粘合引理就能推广过来了．而对于任意多个开子空间的情形，则不需要附加任何条件，粘合引理照样成立(读者自行验证)．

1.6.9　设 $f: X\to Y$，证明下述陈述彼此等价：

(1) f 是开映射．

(2) $\forall\, A\subset X$，$f(\mathring{A})\subset(f(A))^\circ$．

(3) $\forall\, B\subset Y$，$(f^{-1}(B))^\circ\subset f^{-1}(\mathring{B})$．

(4) $\forall\, B\subset Y$，$f^{-1}(\overline{B})\subset\overline{f^{-1}(B)}$．

试给出(2)—(4)中的包含关系为真包含的例子．

证　(1)⇒(2)．因 f 为开映射，所以 $f(\mathring{A})\in\tau_Y$，于是

$$f(\mathring{A}) = (f(\mathring{A}))^\circ \subset (f(A))^\circ.$$

(2)⇒(3)．由(2)得

$$f((f^{-1}(B))^\circ)\subset(ff^{-1}(B))^\circ\subset\mathring{B},$$

故有

$$(f^{-1}(B))^\circ\subset f^{-1}(\mathring{B}).$$

(3)⇒(4)．由(3)得

$$(f^{-1}(\mathscr{C}B))^\circ\subset f^{-1}((\mathscr{C}B)^\circ) = f^{-1}(\mathscr{C}\overline{B}) = \mathscr{C}f^{-1}(\overline{B}).$$

即有

$$\mathscr{C}\,\overline{f^{-1}(B)} = (\mathscr{C}f^{-1}(B))^\circ = (f^{-1}(\mathscr{C}B))^\circ\subset\mathscr{C}f^{-1}(\overline{B}).$$

从而

$$f^{-1}(\overline{B})\subset\overline{f^{-1}(B)}.$$

(4)⇒(1)．$\forall\, G\in\tau_X$，由(4)得

$$f^{-1}(\overline{\mathscr{C}f(G)})\subset\overline{f^{-1}(\mathscr{C}f(G))} = \overline{\mathscr{C}f^{-1}f(G)}\subset\overline{\mathscr{C}G} = \mathscr{C}G.$$

所以

$$G \subset \mathscr{C} f^{-1}(\overline{\mathscr{C} f(G)}),$$

$$f(G) \subset f f^{-1}(\mathscr{C}\overline{\mathscr{C}(f(G))}) \subset \mathscr{C}\overline{\mathscr{C} f(G)}.$$

即

$$\overline{\mathscr{C} f(G)} \subset \mathscr{C} f(G).$$

从而 $\mathscr{C} f(G)$闭于 Y，即 $f(G) \in \tau_Y$.

(2)—(4) 真包含的例子如下：

设 $X=Y=\mathbf{R}$，τ_X 为通常的拓扑，τ_Y 为离散拓扑．$f: X \to Y, x \mapsto x$ 为恒同映射．则 f 是开映射(也是闭映射).

令 $A=[0,1]$，$B_1=[0,1]$，$B_2=(0,1)$，则

$$f(\mathrm{Int}_{\tau_X} A) = (0,1), \qquad \mathrm{Int}_{\tau_Y} f(A) = [0,1],$$

即有

$$f(\mathrm{Int}_{\tau_X} A) \subsetneqq \mathrm{Int}_{\tau_Y} f(A).$$

又

$$\mathrm{Int}_{\tau_X} f^{-1}(B_1) = (0,1) \subsetneqq [0,1] = f^{-1}(\mathrm{Int}_{\tau_Y} B_1),$$

$$f^{-1}(\mathrm{Cl}_{\tau_Y} B_2) = (0,1) \subsetneqq [0,1] = \mathrm{Cl}_{\tau_X} f^{-1}(B_2). \qquad \square$$

注　上述反例既是开映射又是闭映射，但不连续．

1.6.10　设 $f: X \to Y$，证明：

(1) f 为连续的开映射$\Leftrightarrow \forall\, B \subset Y, (f^{-1}(B))^\circ = f^{-1}(\mathring{B})$.(等价地，$\forall\, B \subset Y, \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$).

(2) f 为连续的闭映射$\Leftrightarrow \forall\, A \subset X, \overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

证　(1)"$\Rightarrow$"　由 f 的连续性知 $f^{-1}(\mathring{B})$开于 X. 所以，

$$f^{-1}(\mathring{B}) = (f^{-1}(\mathring{B}))^\circ \subset (f^{-1}(B))^\circ.$$

又 f 为开映由上题的条件(3)得相反的包含关系，所以，$(f^{-1}(B))^\circ = f^{-1}(\mathring{B})$.

"$\Leftarrow$"设 G 开于 Y，则

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(\mathring{G}) = (f^{-1}(G))^\circ,$$

故 $f^{-1}(G)$开于 Y，于是 f 连续．又对照上题条件(3)，f 显然为开映射．

(2) 留作练习． $\square$

1.6.11　设 $f: X \to Y$，证明下述条件都等价：

(1) f 是闭映射．

(2) $\forall\, B \subset Y$ 以及 X 中包含 $f^{-1}(B)$的开集 U，存在 Y 中包含 B 的开集 V 使 $f^{-1}(V) \subset U$.

(3) $\forall\, y \in Y$ 以及 X 中包含 $f^{-1}(\{y\})$的开集 U，存在 Y 中包含 y 的开集 V 使 $f^{-1}(V) \subset U$.

又若已知 f 为闭映射，证明：如果 $B, C \subset Y$，G, W 为 X 中分别包含 $f^{-1}(B)$，$f^{-1}(C)$的不相交的开集，则存在 Y 中不相交的开集 U, V 分别包含 B, C.

证　(1)$\Rightarrow$(2). B, U 如(2)所述，令

$$V = Y - f(X - U)$$

则 V 开于 Y,且

$$f^{-1}(V) = X - f^{-1}f(X - U) \subset X - (X - U) = U.$$

又

$$Y - V = f(X - U) \subset f(X - f^{-1}(B)) = ff^{-1}(Y - B) \subset Y - B,$$

即 $B \subset V$. 于是 V 合要求.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). 设 A 闭于 X,$\forall\, y \in Y - f(A)$

$$f^{-1}(\{y\}) \subset X - f^{-1}f(A) \subset X - A.$$

因 $X-A$ 开于 X,故由(3),存在 Y 中包含 y 的开集 V_y 使 $f^{-1}(V_y) \subset X - A$. 令

$$V = \bigcup_{y \in Y - f(A)} V_y,$$

则

$$Y - f(A) \subset V.$$

又

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{y \in Y - f(A)} f^{-1}(V_y) \subset X - A,$$

所以

$$V \cap f(A) = \varnothing,$$

即

$$V \subset Y - f(A),$$

从而

$$Y - f(A) = V, \qquad f(A) = Y - V$$

闭于 Y. 故 f 是闭映射.

现假定 f 为闭映射,B,C,G,W 如题所述. 则由条件(2),存在 Y 中的开集 U,V 使 $B \subset U$,$C \subset V$ 且 $f^{-1}(U) \subset G$,$f^{-1}(V) \subset W$.

因 $G \cap W = \varnothing$,故 $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$,从而 $U \cap V = \varnothing$. U,V 合要求. □

1.6.12 设 $X = [0,1] \cup [2,3]$,$Y = [0,2]$ 都是 E^1 的子空间,

$$f: X \to Y,\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ x-1 & x \in [2,3]. \end{cases}$$

试判别 f 的连续性,开、闭性.

解 由于 $f_1: [0,1] \to Y, x \mapsto x$; $f_2: [2,3] \to Y, x \mapsto x-1$ 都是定义在 X 的闭子空间上的连续映射,据粘合引理,f 连续.

$(\frac{1}{2},1]$ 是 X 的开集,$f\left((\frac{1}{2},1]\right) = (\frac{1}{2},1]$ 却不是 Y 的开集,故 f 不是开映射.

现设 A 为 X 的闭子集,$\forall\, y \in \overline{f(A)}$,则存在 $f(A)$ 中的序列 $\langle f(x_n)\rangle_{n\in\mathbf{N}} \to y$(A1.3.4(1)),其中 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 为 A 中的序列. 再由 Bolzano-Weierstrass 定理可知 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 有收敛的子序列 $\langle x_{n_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$,设其极限为 x,则由 f 的连续性可知 $\langle f(x_{n_i})\rangle_{i\in\mathbf{N}} \to f(x)$. 由实数序列极限的唯一性可知 $y = f(x) \in f(A)$. 从而 $\overline{f(A)} \subset f(A)$,即 $f(A)$ 闭于 Y,所以 f 是闭映射. □

1.6.13 设 $S^1 = \{x = \langle x_1, x_2\rangle \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ 为 E^2 的子空间,$f: E^1 \to S^1$,

$x \mapsto \langle \cos 2\pi x, \sin 2\pi x \rangle$. 试判断 f 的连续性与开、闭性.

解 由 B1.6.2 可知 f 连续.

现设 G 开于 E^1, $\forall\ y \in f(G)$ $\exists\ x \in G$ s.t. $y = f(x)$, 由于 G 开于 E^1, 故 $\exists\ \varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ s.t. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G$ 于是

$$f((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = \{\langle \cos t, \sin t \rangle \mid 2\pi(x-\varepsilon) < t < 2\pi(x+\varepsilon)\}$$
$$= B_{E^2}(f(x), \delta) \cap S^1,$$

其中

$$\delta = \| f(x) - f(x+\varepsilon) \|,$$

所以 $f((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ 开于 S^1. 又

$$f(x) \in f((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) \subset f(G),$$

所以 $f(G)$ 开于 S^1. 从而 f 为开映射.

再考察 E^1 的子集 $F = \{n + \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbf{N}\}$, 由于

$$\mathscr{C}F = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (n + \frac{1}{2n}, (n+1) + \frac{1}{2(n+1)}) \right)$$

开于 E^1, 故 F 闭于 E^1, 但

$$f(F) = \{\langle \cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n} \rangle \mid n \in \mathbf{N}\}$$

不是 S^1 的闭集, 因为 $\langle 1, 0 \rangle$ 是 $f(F)$ 的聚点却不属于 $f(F)$. 于是 f 不是闭映射. □

注 上述二例说明连续映射(甚至于连续的闭映射)不必是开映射, 连续映射(甚至于连续的开映射)也不必是闭映射.

1.6.14 设 $f: E^1 \to E^1$, 令 $\Gamma = \{\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}^2 \mid y = f(x)\}$ (即 $\Gamma = f$) 叫做 f 的图, 作为 E^2 的子空间, 证明如下定义的映射

$$\varphi: E^1 \to \Gamma, x \mapsto \varphi(x) = \langle x, f(x) \rangle$$

是同胚的充要条件为 f 连续.

证 记 $p_1: E^2 \to E^1, \langle x, y \rangle \mapsto x$; $p_2: E^2 \to E^1, \langle x, y \rangle \mapsto y$. 则 $f = p_2 \circ \varphi$.

如果 φ 为同胚, 显然 f 连续.

反之, 如果 f 连续, 则因 $p_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_{E^1}$, $p_2 \circ \varphi = f$ 都连续, 所以 φ 连续. 再令 $\psi = p_1|_\Gamma: \Gamma \to E^1$, 则 ψ 连续且易见 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{E^1}$, $\varphi \circ \psi = id_\Gamma$, 因此 ψ 是 φ 的逆映射, 所以 φ 是同胚映射. □

1.6.15 设 $X = \{\langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall\ i, x_i \in [0, 1]\}$, $\forall\ x = \langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}}, y = \langle y_i \rangle_{i \in \mathbf{N}} \in X$, 定义

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i|.$$

证明 ρ 是 X 的度量, 且度量空间 $\langle X, \rho \rangle$ 与 Hilbert 方体(B1.2.14)

$$H_C = \{\langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}} \mid \forall\ i, x_i \in [0, \frac{1}{i}]\}$$

同胚.

证 验证 ρ 是 X 上的度量(略). 现令

$$f: H_C \to X, x = \langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}} \mapsto \langle i x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}}.$$

显然 f 是一一的，$\forall\ x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in H_C$ 以及 $\varepsilon>0$，选 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}2^{-i}<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2n}$，则当 $\rho_H(x,y)<\delta$ 时，就有 $\forall\ i$，$|x_i-y_i|<\delta$，

$$\begin{aligned}\rho(f(x),f(y))&=\sum_{i=1}^{n}2^{-i}|ix_i-iy_i|+\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{-i}|ix_i-iy_i|\\&<\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{-i}\\&<n\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 f 连续．

再证 $f^{-1}:X\to H_C$，$x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\mapsto\langle\frac{x_i}{i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$，也连续．$\forall\ x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in X$ 以及 $\varepsilon>0$，选 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<\frac{\varepsilon^2}{2}$，取 $\delta=\varepsilon/(\sqrt{n}\,2^{n+1})$，则当

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|x_i-y_i|<\delta$$

时

$$|x_i-y_i|<2^i\delta\leqslant 2^n\delta,\quad i=1,2,\cdots n.$$

$$\begin{aligned}\rho_H(f^{-1}(x),f^{-1}(y))&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}(x_i-y_i)^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&<\left(n(2^n\delta)^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 f^{-1} 也连续，从而 f 是同胚映射．□

1.6.16　设 X,Y 都是全序集，取序拓扑，证明：若 $f:X\to Y$ 是一一的保序映射（$x_1\leqslant x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$），则 f 是同胚．

证　任取 Y 的子基元 $(a,\to)$，我们证明

$$f^{-1}((a,\to))=(f^{-1}(a),\to).$$

设 $x\in f^{-1}((a,\to))$，则 $f(x)>a$. 如果 $x\leqslant f^{-1}(a)$，由保序性，$f(x)\leqslant a$，矛盾，所以 $x>f^{-1}(a)$. 于是

$$f^{-1}((a,\to))\subset(f^{-1}(a),\to).$$

反之，设 $x\in(f^{-1}(a),\to)$，由保序性 $f(x)\geqslant ff^{-1}(a)=a$. 如果 $f(x)=a$ 则 $x=f^{-1}(a)$ 矛盾．所以 $f(x)>a$，从而 $x\in f^{-1}((a,\to))$. 于是

$$(f^{-1}(a),\to)\subset f^{-1}((a,\to)).$$

这就证明了 Y 的任一形如 $(a,\to)$ 的子基元的原像是 X 的子基元，同理，Y 的任一形如 $(\leftarrow,a)$ 的子基元的原像是 X 的子基元 $(\leftarrow,f^{-1}(a))$，所以 f 连续．

因 f 是一一的保序的，易证 $f^{-1}:Y\to X$ 也是一一的保序的，所以 f^{-1} 也连续，从而 f 是同胚．□

这个结果是自然的．因为序拓扑是由序关系完全决定的，既然 $f:X\to Y$ 是一一的保序

的，则 X 与 Y 有相同的序型，即 X 与 Y 的序关系本质上是一样的，因此由它们决定的拓扑本质上也是一样的，即是同胚的．

1.6.17 设 $X=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$ 为 E^1 的子空间，$f: X\to E^1$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-1,\\ x & x\geqslant 0.\end{cases}$$

证明：f 是一一的保序的，也是连续的．但不是同胚．试与上题作比较，说明这是为什么？

证 令 $g: E^1\to X$ 为

$$g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0,\\ x-1 & x<0.\end{cases}$$

则 $g\circ f=id_X, f\circ g=id_{E^1}$，故 g 为 f 的逆映射，于是 f 是一一的．又 $f|_{(-\infty,-1)}, f|_{[0,+\infty)}$ 都是保序的，又当 $x<-1$ 时，$f(x)=x+1<0=f(0)$，故 f 在 X 上是保序的．由于 $(-\infty,-1)$ 与 $[0,+\infty)$ 都是 X 的闭子空间，且 $f|_{(-\infty,-1)}$ 与 $f|_{[0,+\infty)}$ 都连续，故由粘合引理知 f 连续．但易见 f 的逆 g 在 $x=0$ 处不连续，所以 f 不是同胚．

与上题比较，看来似乎矛盾，其实不然，事实上，上一题中 X,Y 都取序拓扑，而本题中虽然 E^1 的拓扑是序拓扑，但 X 作为 E^1 的子空间，其子空间拓扑却不是 X 本身的序拓扑，因为 0 在子空间拓扑下是 $[0,+\infty)$ 的内点，但在序拓扑之下 0 是 $[0,+\infty)$ 的边界点而非内点．这是不同于上题的实质所在． □

与序拓扑空间相类似的，对于度量空间有下述结果：

1.6.18 设 $\langle X,\rho\rangle,\langle Y,d\rangle$ 均为度量空间，如果 $f: X\to Y$ 满足条件：

$$\forall\, x,y\in X, d(f(x),f(y))=\rho(x,y),$$

则称 f 是保距的，一一的保序映射也叫等距映射．证明：

(1) 如果 $f: X\to Y$ 是等距的，则 f 是同胚．

(2) 如果 f 是保序的，则 f 是嵌入．

证 (1) 由等式 $d(f(x),f(y))=\rho(x,y)$ 显然可见 f 连续．又易见 $f^{-1}: Y\to X$ 也是等距的，故也连续，所以 f 是同胚．

(2) 由于 f 保距，故 $\forall\, x\neq y, f(x)\neq f(y)$，即 f 是单射，于是视 f 为由 X 到 $f(X)$（作为 Y 的子空间）的映射就是等距，从而是同胚，也就是 $f: X\to Y$ 是嵌入． □

注 度量结构与序结构毕竟是两种不同的结构．从度量结构可得保距映射是单射，这是度量的分离性决定的，然而保序映射（$x\leqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$）却未必是单射了．所以提醒读者不能依照本题(2)的结论，误认为保序映射也是嵌入，如果这样认为那就错了．常值映射就是全序集之间最简单的保序映射，却不是嵌入．

由本题自然会联想到 B1.1.3 中给出的 $\mathbf{R}$ 上的两种度量 ρ_1,ρ_2. 由于 $f: \mathbf{R}\mapsto(-1,1)$，$x\mapsto\dfrac{x}{1+|x|}$，$g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, x\mapsto\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x} & x\neq 0,\end{cases}$ 都是等距映射，所以它们都是同胚．此时对 f 而言 $\mathbf{R}$ 上的度量是 ρ_1，$(-1,1)$ 上是通常的欧氏度量，对 g 而言，前一个 $\mathbf{R}$ 上的度量是 ρ_2，而后一个 $\mathbf{R}$ 上是通常的欧氏度量．我们又由 C1.1.9 可见 $\mathbf{R}$ 上的度量 ρ_2 与欧氏度量是不等价的．也许有的初学者将"同胚"与"不等价"联系起来会感到困惑．事实上拓扑空间之间的"同

胚”，与同一集合上不同度量之间的“等价”是两个不同的概念．由同一集合 X 上的等价度量 ρ_1,ρ_2 决定的度量空间 $\langle X,\rho_1\rangle$ 与 $\langle X,\rho_2\rangle$ 作为拓扑空间而言是两个完全“相同的”拓扑空间，当然是同胚的．但反过来两个不同的度量空间(作为拓扑空间) $\langle X,\rho_1\rangle$ 与 $\langle X,\rho_2\rangle$ 是同胚的并未要求它们有相同的拓扑，仅要求有一个一一映射，使在这个映射及其逆映射之下，两个空间的开集之间是一一对应的．这与开集完全相同是两回事，既然如此，两个度量 ρ_1 与 ρ_2 当然可以是不等价的．

要证明两个拓扑空间同胚，通常是用构造同胚映射的办法来证明的，而要证明两个拓扑空间不同胚，就得凭借拓扑性质．如果两个拓扑空间有不同的拓扑性质，则它们不同胚．

1.6.19 试判断下述空间 $\langle X,\tau_X\rangle$ 与 $\langle Y,\tau_Y\rangle$ 是否同胚，为什么？

(1) $X=Y=\mathbf{R}$，$\tau_X=$ 右半开区间拓扑，$\tau_Y=$ 右序拓扑．

(2) $X=Y$ 为不可数集，$\tau_X=$ 有限补拓扑，$\tau_Y=$ 可数补拓扑．

解 (1) $\langle X,\tau_X\rangle$ 不是第二可数的(B1.5.6)，而 $\langle Y,\tau_Y\rangle$ 有可数基 $\{(a,+\infty)\mid a\in\mathbf{Q}\}$. 所以 Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S=\langle X,\tau_X\rangle$ 与右序拓扑空间 $\mathbf{R}_{ro}=\langle Y,\tau_Y\rangle$ 不同胚．

(2) $\langle X,\tau_X\rangle$ 可分(B1.3.3)，但 $\langle Y,\tau_Y\rangle$ 的任一可数子集都是闭集，故不存在可数的稠密子集，即 $\langle Y,\tau_Y\rangle$ 不可分．从而 $\langle X,\tau_X\rangle$ 与 $\langle Y,\tau_Y\rangle$ 不同胚． □

1.6.20 如果 $f:X\to\mathbf{R}$ 满足条件：

$$\forall\, x_0\in X \text{ 以及 } \varepsilon>0\quad \exists\, U\in\mathscr{N}_X(x_0)\ \text{s.t.}\ \forall\, x\in U,\qquad f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

则称 f 是上半连续的(类似地定义下半连续). 证明：

(1) f 上半连续 $\Leftrightarrow$ 在 $\mathbf{R}$ 上取左序拓扑时 f 连续．

(2) f 下半连续 $\Leftrightarrow$ 在 $\mathbf{R}$ 上取右序拓扑时 f 连续．

(3) X 的子集 A 的特征函数 $\kappa_A:X\to\mathbf{R}$(即当 $x\in A$ 时 $\kappa_A(x)=1$，当 $x\notin A$ 时，$\kappa_A(x)=0$)是上(下)半连续的 $\Leftrightarrow A$ 闭(开)于 X.

证 (1) 左序拓扑 τ_{LO} 的基为 $\mathscr{B}_{LO}=\{(-\infty,a)\mid a\in\mathbf{R}\}$，故由 f 上半连续的定义即知 $\forall\ (-\infty,a)\in\mathscr{B}_{LO}$，$f^{-1}((-\infty,a))$ 是 X 的开集．事实上，$\forall\ x\in f^{-1}((-\infty,a))$，$f(x)<a$，则 $\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $f(x)+\varepsilon<a$. 由 f 上半连续，$\exists\ U\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. 当 $x'\in U$ 时 $f(x')<f(x)+\varepsilon<a$ 故有 $x\in U\subset f^{-1}((-\infty,a))$. 于是在 $\mathbf{R}$ 上取左序拓扑时，f 连续．

反之，$\forall\ x_0\in X,\varepsilon>0$，$f^{-1}((-\infty,f(x_0)+\varepsilon))$ 开于 X，故 $\exists\ U\in\mathscr{N}_X(x_0)$ s.t. $x_0\in U\subset f^{-1}((-\infty,f(x_0)+\varepsilon))$，即 $\forall\ x\in U$，$f(x)\in(-\infty,f(x_0)+\varepsilon)$，于是 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. 从而 f 上半连续．

(2) 与(1)类似．

(3) 设 κ_A 上半连续，由于 $A=\kappa_A^{-1}([1,+\infty))$ 且 $[1,+\infty)$ 是 $\langle\mathbf{R},\tau_{LO}\rangle$ 的闭子集，由(1)知 A 闭于 X.

反之，若 A 闭于 X. 因 $\forall\ a\in\mathbf{R}$

$$\kappa_A^{-1}((-\infty,a))=\begin{cases}\mathscr{C}A & 0<a\leqslant 1,\\ \varnothing & a\leqslant 0,\\ X & a>1.\end{cases}$$

故 $\kappa_A^{-1}((-\infty,a))$ 开于 X，即在 $\mathbf{R}$ 上取左序拓扑时，κ_A 连续．所以 κ_A 上半连续．

类似可证括号中的情形． □

1.6.21 设 $f,g: X\to\mathbf{R}$ 都是下(上)半连续函数. 证明:

(1)

$$h: X\to\mathbf{R},\ x\mapsto\max\{f(x),g(x)\}$$
$$k: X\to\mathbf{R},\ x\mapsto\min\{f(x),g(x)\}$$

都是下(上)半连续的.

(2) $s: X\to\mathbf{R}, x\mapsto f(x)+g(x)$, 也下(上)半连续.

(3) 当$\forall\ x\in X$, $f(x)\geqslant 0, g(x)\geqslant 0$ 时, $p: X\to\mathbf{R}, x\mapsto f(x)\cdot g(x)$也下(上)半连续.

证 对下半连续的情形给出证明.

(1) 在 $\mathbf{R}$ 上取右序拓扑 τ_{ro}, 则 $f,g: X\to\mathbf{R}_{ro}$连续. 所以$\forall\ a\in\mathbf{R}, f^{-1}((a,+\infty))$, $g^{-1}((a,+\infty))$都开于 X, 于是

$$h^{-1}((a,+\infty)) = f^{-1}((a,+\infty))\cup g^{-1}((a,+\infty)),$$
$$k^{-1}((a,+\infty)) = f^{-1}((a,+\infty))\cap g^{-1}((a,+\infty)),$$

都开于 X, 所以 $h,k: X\to\mathbf{R}_{ro}$连续, 即 $h,k: X\to\mathbf{R}$ 下半连续.

(2) $\forall\ x_0\in X$ 以及 $\varepsilon>0$, 由 f,g 下半连续 $\exists\ U_1,U_2\in\mathscr{N}_X(x_0)$ s.t. $\forall\ x\in U_1$, $f(x)>f(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}$, 又$\forall\ x\in U_2, g(x)>g(x_0)-\dfrac{\varepsilon}{2}$, 故 $\forall\ x\in U_1\cap U_2\in\mathscr{N}_X(x_0)$,

$$s(x) = f(x)+g(x) > f(x_0)+g(x_0)-\varepsilon = s(x_0)-\varepsilon.$$

故 s 下半连续.

(3) $\forall\ x_0\in X$ 以及$\forall\ \varepsilon>0$.

若 $f(x_0)\cdot g(x_0)=0$, 则$\forall\ x\in X$, 总有 $p(x)>p(x_0)-\varepsilon$. 故不妨假定 $f(x_0)>0, g(x_0)>0$, 取 δ 合于

$$0<\delta<\min\{f(x_0),g(x_0),\varepsilon/2f(x_0),\varepsilon/2g(x_0)\},$$

对上述 δ, 由 f,g 的下半连续性 $\exists\ U_1,U_2\in\mathscr{N}_X(x_0)$ s.t.

$$\forall\ x\in U_1\quad f(x)>f(x_0)-\delta>0$$
$$\forall\ x\in U_2\quad g(x)>g(x_0)-\delta>0,$$

则$\forall\ x\in U_1\cap U_2\in\mathscr{N}_X(x_0)$

$$\begin{aligned}p(x) &= f(x)\cdot g(x) > (f(x_0)-\delta)(g(x_0)-\delta)\\ &= f(x_0)g(x_0)-\delta f(x_0)-\delta g(x_0)+\delta^2\\ &> p(x_0)-\varepsilon/2-\varepsilon/2 = p(x_0)-\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 p 下半连续. □

注 由上(下)半连续的定义直接可知 $f: X\to E^1$ 连续$\Leftrightarrow f: X\to\mathbf{R}$ 既上半连续又下半连续.

于是由上述(1),(2)可得:

若 $f,g: X\to E^1$ 连续, 则 $h,k: X\to E^1$ 也连续, $s: X\to E^1$ 也连续. (h,k 的连续性可参照B1.6.6, 两处对实值函数这一性质的应用, 异曲同工).

上述(1)还可作如下推广:

1.6.22 设 $f_\lambda: X\to\mathbf{R}, \lambda\in\Lambda$, 都是下(上)半连续的, 如果$\forall\ x\in X$, $\{f_\lambda(x)\mid\lambda\in\Lambda\}$有上(下)界, 则由

$$(\sup_\lambda f_\lambda)(x)=\sup_\lambda f_\lambda(x)\ \left((\inf_\lambda f_\lambda)(x)=\inf_\lambda f_\lambda(x)\right)$$

定义的函数$\sup_\lambda f_\lambda: X\to\mathbf{R}(\inf_\lambda f_\lambda: X\to\mathbf{R})$也是下(上)半连续的．

证　对下半连续情形给出证明

$\forall a\in\mathbf{R}$，由$x\in(\sup_\lambda f_\lambda)^{-1}((a,+\infty))$可得$\exists\ \lambda_0\in\Lambda$ s.t. $x\in f_{\lambda_0}^{-1}((a,+\infty))$. 由于$f_{\lambda_0}$下半连续，所以$f_{\lambda_0}^{-1}((a,+\infty))$开于$X$，且

$$x\in f_{\lambda_0}^{-1}((a,+\infty))\subset(\sup_\lambda f_\lambda)^{-1}((a,+\infty)),$$

所以$(\sup_\lambda f_\lambda)^{-1}((a,+\infty))$开于$X$. 故$\sup_\lambda f_\lambda$下半连续． □

注　设$f: X\to\mathbf{R}$，令$g: X\to\mathbf{R}, x\mapsto g(x)=-f(x)$. 则易见$f$上(下)半连续$\Leftrightarrow g$下(上)半连续．

上述各题中我们虽然只对上(下)半连续的一种情形给出了证明，类似地可证另一种情形或利用刚才所述的f与g的对偶关系也能证明．

(二)常见错误分析

1.6.23　设A,B为X的子空间，且$A\cup B=X$. 如果$f: X\to Y$的限制$f|_A, f|_B$都连续，则f是否连续，给出证明或举反例．

由于$\forall\ x\in X, x\in A$或$x\in B$，当$x\in A$时，因$f|_A$连续，所以f在点x处连续．当$x\in B$时，同理，f在点x处连续，由x的任意性得f连续．

试分析上述证明有何错误．

分析　我们先看下述例子：

设

$$X=E^1=Y, A=[0,+\infty), B=(-\infty,0).$$

$f: X\to Y$定义为

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in[0,+\infty)\\ x & x\in(-\infty,0).\end{cases}$$

则$f|_A, f|_B$都连续，但f在$x=0$处不连续．这个例子从反面告诉我们上述证明是错误的，究竟错在何处呢？解剖所给的反例就可揭开这个谜底．$f|_A$在$x=0$处连续，这是“单边”的连续性．作为f在$x=0$处连续，应该是“双边”的．所以$f|_A$在一点处的连续与f在同一点处的连续性是不同的．这是我们从具体例子中看到的结果．那么再一般化一点，其根本原因何在呢？就在子空间中一点的邻域与同一点在原始空间中的邻域是不同的，比如反例中$x=0$在A中的任何一个邻域都不是$x=0$在X中的邻域，而连续性是与邻域的行为密切相关的．

一般地，如果S是X的子空间，f在点$x\in S$处连续，则$f|_S$在点x处也连续．这是因为x在X中的邻域与S的交就是x在S中的邻域．但反过来，如果$f|_S$在$x\in S$处连续就未必有f在x处连续，原因如上．但若附加上“S是开子空间”这个条件，那么由于x在S中的邻域也是x在X中的邻域，从而$f|_S$在$x\in S$处连续，也就有f在x处连续．若S不是开子空间，那么只有当$x\in\mathrm{Int}_X S$时，$f|_S$在x处连续与f在x处连续二者才一致(读者自行验证)．否则未必．

□

1.6.24 证明 $f: X\to Y$ 连续 $\Leftrightarrow \forall\, B\subset Y, \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

"$\Rightarrow$" 由于 f 连续，则 $f^{-1}(\overline{B})$ 是 X 中包含 $f^{-1}(B)$ 的闭集，故有 $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

"$\Leftarrow$" 设 $A\subset X$，令 $A=f^{-1}(B)$，于是由假设条件得

$$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset ff^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{B} = \overline{f(A)}.$$

所以 f 连续．

试分析这个证明有何错误．

分析 在充分性部分，对于 X 的任一子集 A 是否存在 $B\subset Y$ 使 $A=f^{-1}(B)$ 呢？

例如 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, x\mapsto x^2, A=[0,1]$，则 $\forall\, B\subset\mathbf{R}, f^{-1}(B)\neq A$.

所以 $A=f^{-1}(B)$ 的假定是错误的．

正确的证明如下：

[法一] $\forall\, A\subset X$，令 $B=f(A)$，则 $A\subset f^{-1}f(A)=f^{-1}(B)$. 故 $\overline{A}\subset\overline{f^{-1}(B)}$. 于是

$$f(\overline{A}) \subset f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset ff^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{B} = \overline{f(A)}.$$

所以 f 连续．

[法二] 设 F 为 Y 的任一闭子集，则

$$\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F).$$

所以 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭子集，从而 f 连续． □

初学者往往会作出类似于上述那种连存在性都不能肯定的空头假设，建立在这种毫无根据的虚假假设上的证明，尽管后面的推理完全正确，也是无效的．

1.6.25 拓扑空间的第一可数性能否被连续映射保持？给出证明或举反例．

设 X 是第一可数的，$f: X\to Y$ 为连续满射，$\forall\, y\in Y\ \exists\, x\in X$ s.t. $y=f(x)$. 由于 x 第一可数，故存在 x 的可数邻域基 $\mathscr{B}(x)=\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. 现对每个 $V\in\mathscr{N}_Y(f(x))\ \exists\, U\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. $f(U)\subset V$，对于 U 又 $\exists\, U_n\in\mathscr{B}(x)$ s.t. $U_n\subset U$，故 $f(U_n)\subset f(U)\subset V$. 因此 $\{f(U_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 y 的邻域基，即 Y 是第一可数的．

分析 先看下述反例：设 $X=\mathbf{R}=Y$，τ_X 为离散拓扑，τ_Y 为有限补拓扑．$f: X\to Y$ 为恒同映射．则 f 为连续满射．$\langle X,\tau_X\rangle$ 是第一可数的，但 $\langle Y,\tau_Y\rangle$ 不是第一可数的．所以第一可数性不能被连续映射保持．从而上述证明肯定是错误的．问题在于忽略了邻域基的成员必须是邻域，即 $\mathscr{B}(y)\subset\mathscr{N}(y)$ 这个条件，$\forall\, n\in\mathbf{N}, f(U_n)$ 是否为 y 的邻域，不得而知．因此也就不能断定 $\{f(U_n)\mid n\in\mathbf{N}\}$ 是 y 的邻域基．

如果 f 是连续的满的开映射，那么由于

$$x \in \mathring{U}_n,\ y = f(x) \in f(\mathring{U}_n) \subset f(U_n),$$

可知 $f(U_n)$ 是 y 的邻域，从而就有 $\{f(U_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 y 的可数邻域基了．所以第一可数性质被连续的开映射保持． □

C　练习题

1.6.1　设 $f: X\to Y, x\in X$. 证明下述条件等价：

(1) f 在点 x 处连续．

(2) $\forall\ V\in\mathscr{N}_Y(f(x)), f^{-1}(V)\in\mathscr{N}_X(x)$.

(3) 已知 $\mathscr{B}_Y(f(x))$ 为 $f(x)$ 的邻域基，则 $\forall\ V\in\mathscr{B}_Y(f(x)), f^{-1}(V)\in\mathscr{N}_X(x)$.

1.6.2　设 $f: X\to Y, f(X)\subset B\subset Y$，令 $\hat{f}: X\to B, x\mapsto\hat{f}(x)=f(x)$. 证明：如果 B 作为 Y 的子空间，那么 f 连续$\Leftrightarrow\hat{f}$连续．

1.6.3　设 $f: X\to Y$ 为单射，证明

$$f\text{ 连续}\Leftrightarrow\forall\ A\subset X, f(A')\subset(f(A))'.$$

并给出 f 不是单射时，上述结论不真的例子．

1.6.4　设 $\mathbf{R}_{ro}$为右序拓扑空间，检验下述定义的 $f: \mathbf{R}_{ro}\to\mathbf{R}_{ro}$哪些是连续的．

(1) $f(x)=x^2$，　　(2) $f(x)=x^3$，

(3) $f(x)=-x$，　　(4) $f(x)=\sin x$，

(5) $f(x)=\mathrm{arctg}x$，　　(6) $f(x)=ax\ (a\neq 0)$.

1.6.5　设 $f: E^1\to\mathbf{R}_S, x\mapsto x$; $g: \mathbf{R}_S\to E^1, x\mapsto x$. 其中 $\mathbf{R}_S$ 为 Sorgenfrey 直线．证明 f 不连续而 g 连续．

1.6.6　设 A 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，$f: X\to E^1, x\mapsto f(x)=\rho(x,A)$. 证明 f 连续．

1.6.7　设 $X=\{1,2,3\}, \tau=\{\varnothing,X,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$，证明：$f: X\to E^1$ 连续$\Leftrightarrow f$ 是常值的．

1.6.8　判断在下述情形下，映射 $f: X\to Y$ 的开、闭性．

(1) Y 为离散空间．

(2) X 为平凡空间且 f 为满射．

(3) $X=Y=E^1, \forall\ x\in X. f(x)=x^3$.

(4) $Y=\{1,2,3\}, \tau_Y=\{\varnothing,Y,\{1\},\{1,2\}\}$ 且 $\forall\ x\in X$

(i) $f(x)=1$，(ii) $f(x)=2$，(iii) $f(x)=3$.

1.6.9　设$[-3,3]$为 E^1 的子空间，证明：映射

$$f: [-3,3]\to[-3,3],\ x\mapsto f(x)=\frac{1}{6}(x^3-3x)$$

是连续的闭映射，但不是开映射．

1.6.10　设 $f: X\to Y$ 是开(闭)映射，这里 X,Y 的拓扑分别为 τ_X 与 τ_Y. 证明：如果 $\tau'_X\subset\tau_X$ 且 $\tau_Y\subset\tau'_Y$，则 f 作为由$\langle X,\tau'_X\rangle$到$\langle Y,\tau'_Y\rangle$的映射也是开(闭)映射．

1.6.11　设 $f: X\to Y, g: Y\to Z$ 都是开(闭)映射，则 $g\circ f: X\to Z$ 也是开(闭)映射．

1.6.12　设 $f: X\to Y, f(X)\subset Z\subset Y$，$Z$ 为 Y 的子空间．$\hat{f}: X\to Z, x\mapsto\hat{f}(x)=f(x)$. 证明：

(1) 如果 f 是开(闭)映射，则 $\hat{f}$ 也是开(闭)映射．

(2) 如果 $\hat{f}$ 是开(闭)映射，那么 f 是否也是开(闭)映射．如果 Z 为 Y 的开(闭)子空间又如何？理由何在？

1.6.13 (1) 证明 B1.6.10(2).

(2) f 为闭映射 $\Leftrightarrow \forall\ A\subset X, \overline{f(A)}\subset f(A)$.

1.6.14 设 $f: X\to Y$，证明 f 为开映射 $\Leftrightarrow\forall\ B\subset Y$ 以及 X 的包含 $f^{-1}(B)$ 的闭集 F 存在 Y 的包含 B 的闭集 C 使 $f^{-1}(C)\subset F$.

1.6.15 设 $f: X\to Y, g: Y\to Z$，证明：

(1) 如果 f 为满的开(闭)映射，又 $g\circ f$ 连续则 g 连续．

(2) 如果 g 为开(闭)的单射，$g\circ f$ 连续，则 f 连续．

(3) 如果 f 是连续满射，$g\circ f$ 是开(闭)映射，则 g 也是开(闭)映射．

1.6.16 设 $X=\mathbf{R}$，赋予下述拓扑：$\tau_D=\mathscr{P}(X)$，$\tau=$ 通常拓扑，$\tau_S=$ 右半开区间拓扑，$\tau_f=$ 有限补拓扑，$\tau_e=$ 排外点(排斥 0)拓扑，$\tau_F=\tau_f\vee\tau_e$(Fort 拓扑)，$\tau_T=$ 平凡拓扑．

(1) 验证 $\forall\ a>0, f_a: X\to X, x\mapsto ax$ 都是同胚．

(2) 验证 $\forall\ a<0, f_a: X\to X, x\mapsto ax$ 在拓扑 τ_S 之下不连续，而关于上述其它拓扑都是同胚．

1.6.17 设 X,Y 都是无限集，取有限补拓扑，$f: X\to Y$. 证明：

(1) 如果 f 是满射，那么 f 既是开映射又是闭映射，试给出一个不是满射且既非开映射又非闭映射的例子．

(2) 如果 f 是一一的，那么 f 是同胚．

(3) 如果 f 是单射，那么 f 是嵌入．

1.6.18 设 $\mathscr{B}_i=\{(a,b)\subset\mathbf{R}, |a,b\in\mathbf{R},\ a<b\}\cup\{\{i\}\}, i=1,2$. 以 $\mathscr{B}_i$ 为拓扑基生成 $\mathbf{R}$ 的拓扑 $\tau_i(i=1,2)$，证明 $\langle\mathbf{R},\tau_1\rangle$ 与 $\langle\mathbf{R},\tau_2\rangle$ 同胚，但 $\tau_1\neq\tau_2$.

1.6.19 证明映射 $f: (-1,1)\to E^1, x\mapsto\dfrac{x}{1-x^2}$ 是同胚．其中 $(-1,1)$ 为 E^1 的子空间．

1.6.20 设 $f: [0,1)\to S^1, t\mapsto\langle\cos2\pi t,\ \sin2\pi t\rangle$.

(1) 证明 f 是连续的，一一的．

(2) f 是否为同胚？为什么？

1.6.21 在 $\mathbf{R}$ 上赋予下述拓扑：τ_1 为通常拓扑，τ_2 为右半开区间拓扑，τ_3 为右序拓扑，τ_4 为可数补拓扑，τ_5 为有限补拓扑，τ_6 为特殊点拓扑(不妨以原点为特殊点)，τ_7 为排外点拓扑(不妨排斥原点)，τ_8 为离散拓扑．你能证明当 $i\neq j$ 时，$\langle\mathbf{R},\tau_i\rangle$ 与 $\langle\mathbf{R},\tau_j\rangle$ 都不同胚吗？

1.6.22 设 S 为 X 的子空间，证明 S 的子空间拓扑是使包含映射 $i_S: S\to X, x\mapsto x$ 为连续的最小拓扑，且 $i_S: S\to X$ 是嵌入．

1.6.23 设 $f: X\to Y$ 为连续映射，$A\subset X$. 我们已知，若 $x\in\overline{A}$，则 $f(x)\in\overline{f(A)}$，也就是"一点 x 是子集 A 的接触点"这一性质能被连续映射保持．试问：对"一点 x 是子集 A 的聚点(内点，边界点)"，这些性质是否也能被连续映射保持？请给出证明或举反例，进而指出在何类适当的映射(不必同胚)下能保持．

§1.7 拓扑空间的有限积

A 内容提要

1.7.1 定义 设$\langle X_i,\tau_i\rangle(i=1,2,\cdots n)$为$n$个拓扑空间，则由$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$的子集族$\mathscr{B}=\{\prod_{i=1}^{n}G_i|\forall i,G_i\in\tau_i\}$为拓扑基生成的$X$上的拓扑$\tau$叫做$X$的积拓扑，$\langle X,\tau\rangle$就叫上述$n$个空间的积空间．

1.7.2 定理 设$\langle X,\tau\rangle$为n个拓扑空间$\langle X_i,\tau_i\rangle(i=1,2,\cdots,n)$的积空间，$p_i:X\to X_i$为投影，则$X$的子集族$\mathscr{S}=\{p_i^{-1}(U_i)|\forall i,U_i\in\tau_i\}$为$X$的拓扑$\tau$的子基．

由积空间X到每个因子空间X_i的投影p_i是连续的满的开映射，且积拓扑τ是使每个投影都连续的最小拓扑．

度量空间族$\{\langle X_i,\rho_i\rangle\}_{i=1,\cdots,n}$的积度量诱导的拓扑等于积拓扑．

B 例题

(一)

解有关积空间的问题，主要的是要善于利用积拓扑定义中的拓扑基(也叫定义基)以及投影是连续的开映射这个性质．要注意积空间中的子集(不管是开集，闭集或其它形式的子集)未必能写成因子空间的子集之积的形式．所以涉及到开集和点的邻域时，往往要利用定义基转化为因子空间子集之积的形式来处理较为方便．

1.7.1 设$X\times Y$为X与Y的积空间，$A\subset X$，$B\subset Y$．证明

(1) $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

(2) $(A\times B)^{\circ}=\mathring{A}\times\mathring{B}$.

(3) $\mathrm{Bd}(A\times B)=((\mathrm{Bd}A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\mathrm{Bd}B)$.

证 注意应用积空间的定义基．

(1) $\langle x,y\rangle\in\overline{A\times B}$

$\Leftrightarrow\forall U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$以及$V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_Y$，$(U\times V)\cap(A\times B)\neq\varnothing$.

$\Leftrightarrow\forall U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X,U\cap A\neq\varnothing$且$\forall V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_y,V\cap B\neq\varnothing$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A}$且$y\in\overline{B}$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\overline{A}\times\overline{B}$.

(2) $\langle x,y\rangle\in(A\times B)^\circ$

$\Leftrightarrow\exists\ U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ 以及 $V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_Y$ s.t. $U\times V\subset A\times B$

$\Leftrightarrow\exists\ U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ s.t. $U\subset A$ 且$\exists\ V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_Y$ s.t. $V\subset B$

$\Leftrightarrow x\in\mathring{A}$ 且 $y\in\mathring{B}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\mathring{A}\times\mathring{B}$.

(3) 设$\langle x,y\rangle\in\mathrm{Bd}(A\times B)$，则$\forall\ U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ 以及 $V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_Y$，

$$(U\times V)\cap(A\times B)\neq\varnothing\ 且(U\times V)\cap\mathscr{C}(A\times B)\neq\varnothing.$$

所以$\langle x,y\rangle\in\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$，即 $x\in\overline{A}$，$y\in\overline{B}$. 下面再证 $x\in\mathrm{Bd}A$ 或 $y\in\mathrm{Bd}B$.

假若 $x\notin\mathrm{Bd}A$ 且 $y\notin\mathrm{Bd}B$，则

$\exists\ U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ s.t. $U\cap A=\varnothing$或$U\cap\mathscr{C}A=\varnothing$且

$\exists\ V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_Y$ s.t. $V\cap B=\varnothing$或$V\cap\mathscr{C}B=\varnothing$.

又已证 $U\cap A\neq\varnothing$，$V\cap B\neq\varnothing$，故必有 $U\cap\mathscr{C}A=\varnothing$且 $V\cap\mathscr{C}B=\varnothing$. 从而

$$(U\times V)\cap(((\mathscr{C}A)\times Y)\cup(X\times\mathscr{C}B))=\varnothing$$

由于

$$\mathscr{C}(A\times B)=((\mathscr{C}A)\times Y)\cup(X\times\mathscr{C}B),$$

故

$$(U\times V)\cap\mathscr{C}(A\times B)=\varnothing,$$

与$\langle x,y\rangle\in Bd(A\times B)$矛盾．所以 $x\in\mathrm{Bd}A$ 或 $y\in\mathrm{Bd}B$. 再与 $x\in\overline{A}$ 且 $y\in\overline{B}$ 结合起来就有

$$\langle x,y\rangle\in((\mathrm{Bd}A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\mathrm{Bd}B).$$

反过来，若$\langle x,y\rangle\in(\mathrm{Bd}A)\times\overline{B}$. 则$\forall\ U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ 以及 $V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_Y$，$U\cap A\neq\varnothing$，$U\cap\mathscr{C}A\neq\varnothing$且 $V\cap B\neq\varnothing$. 于是

$$(U\times V)\cap(A\times B)\neq\varnothing\ 且(U\times V)\cap((\mathscr{C}A)\times Y)\neq\varnothing,$$

从而

$$(U\times V)\cap(A\times B)\neq\varnothing\ 且(U\times V)\cap\mathscr{C}(A\times B)\neq\varnothing.$$

所以

$$\langle x,y\rangle\in\mathrm{Bd}(A\times B).$$

若$\langle x,y\rangle\in\overline{A}\times\mathrm{Bd}B$，同理可证$\langle x,y\rangle\in\mathrm{Bd}(A\times B)$.

综上可知(3)成立． □

注　请考虑(3)的第一部分的证明中，为什么在证 $x\in\mathrm{Bd}A$ 或 $y\in\mathrm{Bd}B$ 时，用反证法，而不是从上一步直接往下推(参见 B1.2.15，B1.2.17).

1.7.2　设 $f: X\times Y\to Z$，$\varphi: X\times Y\to Y$ 均连续，证明：

$$g: X\times Y\to Z,$$
$$\langle x,y\rangle\mapsto g(x,y)=f(x,\varphi(x,y))$$

也连续，其中 $g(x,y)=g(\langle x,y\rangle)$，$\varphi(x,y)$，$f(x,\varphi(x,y))$类似，$X\times Y$ 为积空间．(以后除特别申明外，已知 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为拓扑空间，则$\prod_{i=1}^{n}X_i$ 都表示积空间，$f(\langle x_1,\cdots,x_n\rangle)$ 都省写为 $f(x_1,\cdots,x_n)$).

证　[法一]　$\forall\ \langle x,y\rangle\in X\times Y$ 以及 $W\in\mathscr{N}_Y(g(x,y))=\mathscr{N}_Y(f(x,\varphi(x,y)))$. 由 f 的

连续性$\exists\ U_1\in\mathcal{N}_X(x)\cap\tau_X$以及$V\in\mathcal{N}_Y(\varphi(x,y))\cap\tau_Y$ s.t. $f(U_1\times V)\subset W$(注　这里就利用了定义基,取由定义基的元$U_1\times V$构成的$\langle x,\varphi(x,y)\rangle$的邻域). 再由$\varphi$的连续性, 对于$\varphi(x,y)$的邻域$V$,又$\exists\ U_2\in\mathcal{N}_X(x)\cap\tau_X, G\in\mathcal{N}_Y(y)\cap\tau_Y$ s.t. $\varphi(U_2\times G)\subset V$.

取$U=U_1\cap U_2$,则$U\times G\in\mathcal{N}_{X\times Y}(\langle x,y\rangle)$且$\forall\ \langle x',y'\rangle\in U\times G$有$\varphi(x',y')\in V$, 从而$f(x',\varphi(x',y'))\in W$,故$g(U\times G)\subset W$. 所以$g$连续.

[法二]　由g的定义联想到微积分中的复合函数,g也应该是一种复合映射,但根据复合映射的定义却不能直接表示成f与φ的复合. 实际上我们只要定义一个新的映射$h: X\times Y\to X\times Y$作桥梁就可以了. 令

$$h(x,y)=\langle x,\varphi(x,y)\rangle\quad(\forall\ \langle x,y\rangle\in X\times Y),$$

则$g=f\circ h$. 而$p_1h=p_1, p_2h=\varphi$,其中$p_1: X\times Y\to X$, $p_2: X\times Y\to Y$均为投影,由于p_1h, p_2h均连续,将由B1.7.9知h连续,从而g连续. □

注　到第三章会发现用网的收敛性来证更为简便.

1.7.3　设U是积空间$X\times X$的开子集,视U为X中的关系,证明:

(1) U^{-1}也是$X\times X$的开子集.

(2) $\forall\ x\in X, U[x]=\{y\in X\mid\langle x,y\rangle\in U\}$是$X$的开集.

证　(1) 设$\langle x,y\rangle\in U^{-1}$则$\langle y,x\rangle\in U$,故$\exists\ G_1,G_2\in\tau_X$ s.t. $\langle y,x\rangle\in G_1\times G_2\subset U$. 于是$\langle x,y\rangle\in G_2\times G_1\subset U^{-1}$,所以$U^{-1}$也是$X$的开集.

(2) 设$y\in U[x]$,则$\langle x,y\rangle\in U$故$\exists\ G_1,G_2\in\tau_X$ s.t.

$$\langle x,y\rangle\in G_1\times G_2\subset U.$$

因$\forall\ z\in G_2, \langle x,z\rangle\in G_1\times G_2\subset U$,故$z\in U[x]$. 于是

$$y\in G_2\subset U[x].$$

这就表明$U[x]$是X的开集. □

1.7.4　证明$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$的字典序之下的序拓扑(记为$\tau^*$)与$\mathbf{R}_d\times E^1$的积拓扑(记为$\tau$)二者相同,其中$\mathbf{R}_d$是$\mathbf{R}$取离散拓扑.

证　设$G\in\tau^*$, $x=\langle x_1,x_2\rangle\in G$. 则$\exists\ y,z\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, s.t. $y<x<z$,且$(y,z)\subset G$. 其中(y,z)表示$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$在字典序下的区间. 不妨假设

$$y=\langle x_1,y_2\rangle,\quad z=\langle x_1,z_2\rangle,$$

于是

$$y_2<x_2<z_2,$$
$$(y,z)=\{x_1\}\times(y_2,z_2),$$

其中(y_2,z_2)是$\mathbf{R}$的区间.

由于$\{x_1\}\times(y_2,z_2)\in\tau$, 故$G\in\tau$,于是

$$\tau^*\subset\tau.$$

反过来,设$G\in\tau, x=\langle x_1,x_2\rangle\in G$,则

$$\exists\ (c,d)\subset\mathbf{R}\ \text{s.t.}\ x\in\{x_1\}\times(c,d)\subset G.$$

而

$$\{x_1\}\times(c,d)=(\langle x_1,c\rangle,\langle x_1,d\rangle),$$

其中右端为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 在字典序下的区间，所以

$$x=\langle x_1,x_2\rangle\in(\langle x_1,c\rangle,\langle x_1,d\rangle)\subset G.$$

故 $G\in\tau^*$，即 $\tau\subset\tau^*$. □

1.7.5 证明存在 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的度量 ρ 使由 ρ 诱导的拓扑等于 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 的字典序拓扑.

证 由上题已知 $\langle\mathbf{R}\times\mathbf{R},\tau^*\rangle=\mathbf{R}_d\times E^1$. 令

$$d:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R} \text{ 为 } d(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & x_1\neq x_2\\ 0 & x_1=x_2.\end{cases}$$

$$\rho:(\mathbf{R}\times\mathbf{R})\times(\mathbf{R}\times\mathbf{R})\to\mathbf{R} \text{ 为}$$

$$\rho(\langle x_1,x_2\rangle,\langle y_1,y_2\rangle)=\max\{d(x_1,y_1),|x_2-y_2|\}$$

由 B1.6.1 的注 ρ 等价于 $\mathbf{R}_d$ 与 E^1 的积度量，故 ρ 诱导的拓扑就是积拓扑. 即 $\mathbf{R}_d\times E^1$ 的拓扑，也即 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 字典序拓扑 τ^*. 由定义直接验证也可得 ρ 诱导的拓扑 $\tau_\rho=\tau=\tau^*$ (τ,τ^* 意义如上题). □

1.7.6 设 L 为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的一条直线，试描述 L 作为积空间 $\mathbf{R}_S\times E^1$ 的子空间与作为 $\mathbf{R}_S\times\mathbf{R}_S$ 的子空间时的拓扑，其中 $\mathbf{R}_S$ 为 Sorgenfrey 直线.

解 (1) 作为 $\mathbf{R}_S\times E^1$ 的子空间：

(i) 当 L 与 y 轴平行时，每个矩形 $[a,b)\times(c,d)$ 与 L 之交若非空，则为 L 的开区间，且 L 的每个开区间也总能表示成某个矩形 $[a,b)\times(c,d)$ 与 L 之交. 所以此时 L 的拓扑就是通常的拓扑.

(ii) 当 L 与 x 轴平行时，与(i)类似地考虑，可知此时 L 的拓扑是右半开区间拓扑.

(iii) 当 L 不与坐标轴平行时，每个矩形 $[a,b)\times(c,d)$ 与 L 之交若非空，则或为开区间或为右半开区间，而开区间可表示为右半开区间族的并，所以此时 L 的拓扑也是右半开区间拓扑.

(2) 作为 $\mathbf{R}_S\times\mathbf{R}_S$ 的子空间：

(i) L 与坐标轴平行时，L 的拓扑是右半开区间拓扑.

(ii) L 不与坐标轴平行且斜率大于 0 时，L 的拓扑也是右半开区间拓扑.

(iii) L 不与坐标轴平行且斜率小于 0 时，L 的拓扑是离散拓扑，因为每一点总是某个半开矩形 $[a,b)\times[c,d)$ 的顶点. □

1.7.7 设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间，证明 X 的度量拓扑 τ_ρ 是使积空间 $X\times X$ 上的映射 $\rho:X\times X\to E^1$ 为连续的最小拓扑.

证 我们已知在 X 上取度量拓扑 τ_ρ 时，ρ 是积空间 $X\times X$ 上的连续函数，现假定 τ 也是 X 的拓扑，并且 ρ 作为定义在积空间 $\langle X,\rho\rangle\times\langle X,\rho\rangle$ 上的映射也连续. 我们要证 $\tau_\rho\subset\tau$. 显然只需证明 τ_ρ 的每个基元 $B_\rho(x,\varepsilon)\in\tau$.

我们先作一番分析：为了要利用 ρ 的连续性，就要设法把 X 的球形邻域 $B_\rho(x,\varepsilon)$ 嵌入到积空间中，容易看到当 X 取定一个拓扑后，$\{x\}\times X$ 与 X 是同胚的，所以把 $B_\rho(x,\varepsilon)$ 嵌入到积空间就应是 $\{x\}\times B_\rho(x,\varepsilon)$，其中每一点 $\langle x,y\rangle$ 都满足条件 $\rho(x,y)<\varepsilon$，于是我们想到要验证下述等式

$$\{x\}\times B_\rho(x,\varepsilon)=\rho^{-1}([0,\varepsilon))\cap(\{x\}\times X).$$

这就留给读者自行验证．

现在，由于 $\rho:\langle X,\tau\rangle\times\langle X,\tau\rangle\to E^1$ 也连续，所以 $\rho^{-1}([0,\varepsilon))$ 开于 $\langle X,\tau\rangle\times\langle X,\tau\rangle$. 于是由上述等式可知 $\{x\}\times B_\rho(x,\varepsilon)$ 开于 $\langle X,\tau\rangle\times\langle X,\tau\rangle$ 的子空间 $\{x\}\times X$，而投影

$$p_2:\{x\}\times X\to X,\ \langle x,y\rangle\mapsto y$$

是 $\{x\}\times X$（作为 $\langle X,\tau\rangle$ 与 $\langle X,\tau\rangle$ 乘积的子空间）到 $\langle X,\tau\rangle$ 的开映射（事实上是同胚），所以 $B_\rho(x,\varepsilon)$ 开于 $\langle X,\tau\rangle$，即 $B_\rho(x,\varepsilon)\in\tau$，从而 $\tau_\rho\subset\tau$. □

注　这道题初看起来很难，不知从何下手，但通过认真分析以后，方法也就自然明朗了．所以在解题之前先作一番分析，有助于化难为易．

1.7.8　设 $f:E^n\to E^m(n>m)$ 为线性映射．证明：如果 f 为满射，则 f 为开映射．

证　设 f 在标准基之下的矩阵为

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=(A_1,A_2),$$

其中 $A_1=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. 因 f 为满射，故 rank $A=m$，不妨假定 $\det A_1\neq 0$，$E^n=E^m\times E^k$，$k=n-m$. 现在只需证明对于 E^m 中任一开集 U 以及 E^k 中任一开集 V，$f(U\times V)$ 是 E^n 中的开集．E^m，E^k 中点的坐标表示，我们采用列向量形式．

任取

$$w_0=f(x_0,y_0)=A_1x_0+A_2y_0\in f(U\times V).$$

由于 $\det A_1\neq 0$，故由 A_1 确定的线性映射是同胚，其逆记为

$$g:E^m\to E^m,\ u\mapsto g(u)=A_1^{-1}\cdot u.$$

由于 $A_1x_0=w_0-A_2y_0$，故 $g(w_0-A_2y_0)=x_0$，于是对于 x_0 的邻域 U，存在 $w_0-A_2y_0$ 的邻域 G 使

$$g(G)\subset U.$$

再定义映射 F 如下

$$F:E^m\times E^k\to E^m,\ \langle w,y\rangle\mapsto w-A_2y.$$

显然 F 连续，于是对于 $F\langle w_0,y_0\rangle=w_0-A_2y_0$ 的邻域 G，存在 w_0 在 E^m 中的邻域 W 以及 y_0 在 E^k 中的邻域 $V_0\subset V$ 使 $F(W\times V_0)\subset G$.

现在 $\forall\ w\in W$ 以及 $y\in V_0$，

$$F(w,y)=w-A_2y\in G,$$
$$g(w-A_2y)\in U.$$

令 $x=g(w-A_2y)\in E^m$，则

$$\begin{aligned}f(x,y)&=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A_1x+A_2y\\&=g^{-1}(x)+A_2y=w-A_2y+A_2y\\&=w.\end{aligned}$$

所以

$$w\in f(U\times V_0)\subset f(U\times V).$$

从而

$$w_0\in W\subset f(U\times V).$$

即 $f(U\times V)$ 的每一点 w_0 都是内点，故 $f(U\times V)$ 是 E^m 的开集，从而 f 是开映射． □

注　这一结果是线性泛函分析中一个重要定理，即所谓开映射定理的特例．

（二）常见错误分析

1.7.9　设 $(Y_i,\tau_i)(i=1,2)$ 为拓扑空间，$Y=Y_1\times Y_2$ 为积空间．证明 $f:X\to Y$ 连续 $\Leftrightarrow f_i=p_i\circ f:X\to Y_i(i=1,2)$ 都连续，其中 $p_i:Y_1\times Y_2\to Y_i$ 为投影．

一个病态的证明（充分性部分）：

$\forall\ x\in X$ 及 $V\in\mathscr{N}_Y(f(x))\cap\tau_Y$，因 $f(x)\in V$．故

$$f_1(x)=p_1f(x)\in p_1(V),\quad f_2(x)=p_2f(x)\in p_2(V).$$

因 p_i 为开映射，故

$$p_1(V)\in\mathscr{N}_{Y_1}(f_1(x)),\quad p_2(V)\in\mathscr{N}_{Y_2}(f_2(x)).$$

因 p_if 连续，故

$$\exists\ U_1,U_2\in\mathscr{N}_X(x)\ \text{s.t.}\ f_i(U_i)\subset p_i(V),\quad i=1,2.$$

于是对 $U=U_1\cap U_2\in\mathscr{N}_X(x)$ 有

$$f(U)=\langle f_1(U),f_2(U)\rangle\subset\langle p_1(V),p_2(V)\rangle=V.$$

$$(\text{或写成 } f(U)=f_1(U)\times f_2(U)\subset p_1(V)\times p_2(V)=V).$$

所以 f 连续．

请分析这个证明错在何处．

分析　(1) 记号 $\langle p_1(V),p_2(V)\rangle$，$\langle f_1(U),f_2(U)\rangle$ 不妥，严格地讲，它表示 $\mathscr{P}(Y_1)\times\mathscr{P}(Y_2)$ 的元素．这当然不是本质的，你也可以约定它就表示集合乘积的形式 $p_1(V)\times p_2(V)$，$f_1(U)\times f_2(U)$．一般不这么做．

(2) 实质性的问题是 $Y_1\times Y_2$ 的子集并非都是乘积形式的．一般地 $f(U)\neq p_1f(U)\times p_2f(U)$，直觉上从笛卡儿平面 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 来看一个圆形区域就不能表示成集合乘积的形式，只有矩形区域才能表示成集合乘积的形式．一般地 $f(U)\subset p_1f(U)\times p_2f(U)$．同样地 $V\neq p_1(V)\times p_2(V)$，而是 $V\subset p_1(V)\times p_2(V)$．正因为如此就不能断定 $f(U)\subset V$ 了．

解决这个问题的"灵丹妙药"就是将一般的开邻域 V 换成定义基中包含 $f(x)$ 的成员，因为根据拓扑基的定义，一定有定义基中包含 $f(x)$ 的成员被 V 包含．现将正确证明完整地叙述如下：

"$\Rightarrow$"　是显然的，因为 $p_i(i=1,2)$ 都连续．

"$\Leftarrow$"　［法一］　$\forall\ x\in X$ 以及 $V\in\mathscr{N}_Y(f(x))$，$\exists\ G_i\in\tau_i(i=1,2)$ s.t. $f(x)\in G_1\times G_2\subset V$．则 $G_i\in\mathscr{N}_{Y_i}(f_i(x))$，$i=1,2$．由于 f_i 均连续，故 $\exists\ U_1,U_2\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. $f_i(U_i)\subset G_i$，$i=1,2$．则 $U_1\cap U_2\in\mathscr{N}_X(x)$ 且

$$\begin{aligned}f(U_1\cap U_2)&\subset p_1f(U_1)\times p_2f(U_2)=f_1(U_1)\times f_2(U_2)\\&\subset G_1\times G_2\subset V.\end{aligned}$$

所以 f 连续．

［法二］　对 Y 的定义基中任一成员 $G_1\times G_2$，其中 $G_i\in\tau_i$，$i=1,2$．

$$f^{-1}(G_1\times G_2)=f^{-1}((G_1\times Y_2)\cap(Y_1\times G_2))$$

$$= f^{-1}((p_1^{-1}(G_1) \cap p_2^{-1}(G_2))$$
$$= f^{-1} \circ p_1^{-1}(G_1) \cap f^{-1} \circ p_2^{-1}(G_2)$$
$$= (p_1 f)^{-1}(G_1) \cap (p_2 f)^{-1}(G_2) \in \tau_X.$$

所以 f 连续.

［法三］ 对于 Y 的任一子基成员 $p_i^{-1}(G_i)$，其中 $G_i \in \tau_i$ $i=1$ 或 $i=2$.

$$f^{-1}(p_i^{-1}(G_i)) = (p_i f)^{-1}(G_i) \in \tau_X.$$

所以 f 连续. □

注 利用数学归纳法可将 Y 推广为 n 个因子空间乘积的形式. 到第六章还将推广到任意多个因子空间乘积的形式. B1.6.2 是本题的特例.

C 练习题

1.7.1 证明 $\forall\ x \in X$，积空间 $X \times Y$ 的子空间 $\{x\} \times Y$ 与 Y 同胚.

1.7.2 设 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 分别为 $\langle X, \tau_X \rangle$，$\langle Y, \tau_Y \rangle$ 的基，$\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ 分别为它们的子基. 证明

$$\mathscr{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathscr{B}_1, B_2 \in \mathscr{B}_2\}$$
$$\mathscr{S} = \{S_1 \times S_2 \mid S_1 \in \mathscr{S}_1, S_2 \in \mathscr{S}_2\}$$

分别为 $X \times Y$ 的基与子基.

1.7.3 设 X_i, Y_i 都是拓扑空间，$f_i: X_i \to Y_i (i=1,2)$，定义

$$\varphi: X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2,$$
$$\langle x_1, x_2 \rangle \mapsto \varphi(x_1, x_2) = \langle f_1(x_1), f_2(x_2) \rangle.$$

也可写成 $\varphi = f_1 \times f_2$. 证明：如果 f_1, f_2 都连续，则 φ 也连续.

1.7.4 $f: X \to Y$，定义

$$\varphi: X \to X \times Y,\ x \mapsto \langle x, f(x) \rangle.$$

证明 φ 为嵌入 $\Leftrightarrow f$ 连续.

注 事实上，$\varphi(X)$ 就是映射 f 的图集，本题的结论表明定义空间与一个连续映射的图集是同胚的. 因此，当 $X \subset E^n$，$Y = E^{n+1} = E^n \times E^1$ 时，若 $f: X \to E^{n+1}$ 连续，则 X 同胚于 E^{n+1} 中由多元连续函数（指单值函数）f 定义的超曲面，特别地，$n=1$ 时，X 同胚于平面曲线 $y = f(x)$，此即 B1.6.14，$n=2$ 时，X 同胚于空间曲面 $z = f(x, y)$.

1.7.5 证明 $X \times X$ 的对角线 $id_X = \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$ 是积空间 $X \times X$ 的开集 $\Leftrightarrow X$ 是离散空间.

1.7.6 证明

(1) 积空间 $X \times Y$ 第一(二)可数 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 都第一(二)可数.

(2) 积空间 $X \times Y$ 可分 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 都可分.

1.7.7 试比较 $[0,1] \times [0,1]$ 的积拓扑（记作 τ），字典序拓扑（记作 τ^*），以及 $[0,1]_d \times [0,1]$ 的积拓扑（记作 τ'）. 其中 $[0,1]$ 的拓扑为通常拓扑，$[0,1]_d$ 的拓扑为离散拓扑.

第二章　连通性质

§2.1　连通空间

A　内容提要

2.1.1 定义　设 A,B 是空间 X 的一对非空的，不相交的开集，且 $X=A\cup B$，则说 $\{A,B\}$ 是 X 的一个分解．若 X 不存在这种分解就说 X 是连通的；若 X 的子集 A 作为子空间是连通的，则说 A 为 X 的连通子集；X 的极大的连通子集叫 X 的连通分支．

2.1.2 定理　下述条件都等价：

(1) X 连通．

(2) 不存在由 X 到离散空间 $\{0,1\}$ 的连续满射（即任一连续映射 $f:X\to\{0,1\}$ 都是常值的）．

(3) X 不存在既开又闭的非空真子集．

(4) X 不能表示成一对非空的不相交的闭集之并．

2.1.3 定理　设 C 为 X 的连通子集，$C\subset A\subset\overline{C}$，则 A 连通．

设 $A,A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 都是拓扑空间 X 的连通子集，且 $\forall\ \lambda\in\Lambda, A\cap A_\lambda\neq\varnothing$，则 $S=A\cup(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)$ 也连通．

2.1.4 定理　空间 X 的连通性能被连续映射保持．

2.1.5（介值定理）　设 X 连通，$f:X\to E^1$ 连续，$x,y\in X$，如果 $f(x)<f(y)$．那么 $\forall\ c\in(f(x),f(y))\ \exists\ z\in X$ s.t. $f(z)=c$.

2.1.6 定理　X 的任一连通子集总包含在某个连通分支内；X 总可表示成一些连通分支的并，X 的任意两个不同的连通分支不相交；X 的每个连通分支都是闭子集．

例　E^1 的任一区间，圆周 $S^1,E^2,E^2-\{0\}$ 等都连通．

B　例题

连通空间，简单地讲，它是一个“整块”，不能用不相交的开集分割成两块或更多块．这种粗糙的直觉性的观点，在解题过程中能启发我们的思考．精确地就是要掌握连通性的等价

条件（包括 A2.1.2 定理中的条件以及 B2.1.1 给出的条件）．因为这些条件都是用否定语气陈述的．所以常常使用反证法解题．在涉及连通子集时，B2.1.1 的条件使用起来往往比较方便．因为它可以避开子空间拓扑带来的麻烦，直接采用原始空间的拓扑来刻划．

2.1.1　证明空间 X 的子集 C 连通$\Leftrightarrow C$ 不是 X 的一对非空的相互隔离的子集之并．

证　"$\Leftarrow$"　设 C 有分解$\{A,B\}$，则 $\mathrm{Cl}_C A=A$，$\mathrm{Cl}_C=B$. 记 $\mathrm{Cl}_X A=\overline{A}$，$\mathrm{Cl}_X B=\overline{B}$.

$$\begin{aligned}(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})&=(\overline{A}\cap C\cap B)\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\&=((\mathrm{Cl}_C A)\cap B)\cup(A\cap\mathrm{Cl}_C B)=A\cap B=\varnothing.\end{aligned}$$

所以，A,B 就是 X 的一对非空的隔离子集，且 $C=A\cup B$.

"$\Rightarrow$"　设 C 是一对非空隔离子集 A,B 之并．由于 $\overline{A}\cap B=\varnothing$，故

$$\mathrm{Cl}_C A=\overline{A}\cap C=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)=A$$

即 A 闭于 C，同理 B 闭于 C，故 C 不连通．□

注　这道题表明 X 的子集 C 的连通性，可以直接由 X 的拓扑完全确定．当 $C=X$ 时，就得 X 连通的又一等价条件．

2.1.2　设 C 为 X 的连通子集，A,B 为 X 的一对非空的隔离子集．证明：如果 $C\subset A\cup B$，那么 $C\subset A$ 或 $C\subset B$.

证　若 $C\cap A\neq\varnothing$ 且 $C\cap B\neq\varnothing$，由于

$$C=(C\cap A)\cup(C\cap B),$$
$$\overline{C\cap A}\cap(C\cap B)\subset\overline{A}\cap B=\varnothing,$$

同理，

$$(C\cap A)\cap\overline{(C\cap B)}=\varnothing,$$

故 $C\cap A$ 与 $C\cap B$ 就是 X 的一对非空的隔离子集，从而 C 不连通．所以有 $C\cap A=\varnothing$ 或 $C\cap B=\varnothing$，即

$$C\subset B\text{ 或 }C\subset A.$$ □

注　由 B2.1.1 的证明过程可知本题的结论对$\{A,B\}$是 X 的一个分解也成立．

2.1.3　设 C 为 X 的非空子集，如果$\forall\ x,y\in C$ 存在 X 的连通子集 $C_{x,y}$ 使$\{x,y\}\subset C_{x,y}\subset C$，则 C 连通．

证　取定 $a\in C$，则 $a\in\bigcap_{x\in C}C_{a,x}$ 且 $C=\{a\}\cup(\bigcup_{x\in C}C_{a,x})$，故由 A2.1.3 知 C 连通．□

注　本题的结果常常是很有用的．除了利用连通性的等价条件（A2.1.2(1)－(4) 及 B2.1.1）证明 X 的子集 C 的连通性外，其它方法还有：

(1) 构造一个连通子集 A 使 $A\subset C\subset\overline{A}$，特别地使 $C=\overline{A}$.

(2) 取 $x\in C$，设 C_x 为包含 x 的连通分支，证明 $C=C_x$. 或直接利用 B2.1.3 的结果．

(3) 证明 C 等于一族连通子集的并：

$$C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda,$$

其中$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$或两两相交，或有公共点，或每个 C_λ 都与某个固定的 C_{λ_0} 相交．$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$两两相交，就能用 B2.1.3 的结果得 C 连通．

(4) 证明 C 与某已知连通空间同胚或是已知的连通空间在连续映射下的像．

2.1.4　设$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为 X 的连通子集族，证明：如果$\forall\ \lambda,\mu\in\Lambda\ \exists\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ s.t. $\lambda_1=\lambda$,

$\lambda_n=\mu$，且$\forall\, i=1,2,\cdots,n-1$，$A_{\lambda_i}$与$A_{\lambda_{i+1}}$不是隔离的．那么$C=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$是$X$的连通子集．

证　$\forall\, x,y\in C$，若$\exists\ \lambda_0\in\Lambda$ s. t. $\{x,y\}\subset A_{\lambda_0}$，则取$C_{x,y}=A_{\lambda_0}$，若$x\in A_\lambda, y\in A_\mu$，则$\exists\ \lambda_1=\lambda,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1},\lambda_n=\mu$. s. t. $\forall\, i=1,2,\cdots,n-1$，$A_{\lambda_i}$与$A_{\lambda_{i+1}}$不是隔离的．于是$A_{\lambda_i}\cup A_{\lambda_{i+1}}$连通(C2.1.5)，由此可得$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}$连通，此时取$C_{x,y}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}$. 于是由B2.1.3得$C$连通．　□

2.1.5　设C为X的连通子集，$A\subset X$. 证明：如果$C\cap A\neq\varnothing$且$C\cap(\mathscr{C}A)\neq\varnothing$，则$C\cap \mathrm{Bd}A\neq\varnothing$.

证　若$C\cap\mathrm{Bd}A=\varnothing$，则$(C\cap\overline{A})\cap(C\cap\overline{\mathscr{C}A})=\varnothing$. 又因$C\cap\overline{A}\neq\varnothing$，$C\cap\overline{\mathscr{C}A}\neq\varnothing$，$(C\cap\overline{A})\cup(C\cap\overline{\mathscr{C}A})=C$，则与$C$的连通性矛盾．所以$C\cap\mathrm{Bd}A\neq\varnothing$.　□

2.1.6　设$S\subset X$，证明：$\overline{S}$不连通的充要条件是$\exists\ A,B\in\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$ s. t. $S\subset A\cup B$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，且$A\cap S\neq\varnothing$，$B\cap S\neq\varnothing$.

证　[法一]　"$\Rightarrow$"　由B2.1.1，存在X的一对非空的隔离子集A,B使$\overline{S}=A\cup B$，则$S\subset A\cup B$.

现证$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，若有$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，由$\overline{A}\cap B=\varnothing=A\cap\overline{B}$得$x\notin A\cup B=\overline{S}$，与$x\in\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{S}$矛盾．所以$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$.

再证$A\cap S\neq\varnothing$，$B\cap S\neq\varnothing$.

由$x\in\overline{A}$知$x\notin B$，但$x\in\overline{A}\subset\overline{S}=A\cup B$，故$x\in A$，即得$\overline{A}=A$，同理$\overline{B}=B$.

假定$A\cap S=\varnothing$，则由$S=(A\cap S)\cup(B\cap S)=B\cap S$知$S\subset B$，所以$\overline{S}\subset\overline{B}=B$，于是$A=\varnothing$，矛盾．从而$A\cap S\neq\varnothing$，同理$B\cap S\neq\varnothing$.

"$\Leftarrow$"　令$C=\overline{S}\cap\overline{A}$，$D=\overline{S}\cap\overline{B}$. 则$C,D$闭于$\overline{S}$，且

$$C\cup D=\overline{S}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{S},$$
$$C\supset S\cap A\neq\varnothing,\ D\supset S\cap B\neq\varnothing,$$
$$C\cap D=\overline{S}\cap(\overline{A})\cap\overline{B})=\varnothing,$$

于是$\{C,D\}$是$\overline{S}$的一个分解，与$\overline{S}$的连通性矛盾．

[法二]　"$\Rightarrow$"　设$\{A,B\}$是子空间$\overline{S}$的一个分解，则A,B非空，闭于$\overline{S}$，从而也闭于X. $\overline{S}=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$，于是

$$S\subset A\cup B,\ \overline{A}\cap\overline{B}=A\cap B=\varnothing.$$

与[法一]同样地可证$A\cap S\neq\varnothing$，$B\cap S\neq\varnothing$.

"$\Leftarrow$"　同[法一].　□

2.1.7　设A为E^n的可数子集，证明E^n-A是E^n的连通子集(此处$n\geqslant 2$).

证[法一]　设$A=\{a^i\}_{i\in\mathbf{N}}$，不妨假定$O\notin A$，$\forall\, x\in E^n$，令$L_x=\{\lambda x\mid\lambda\geqslant 0\}$. 于是$L_x$是$E^n$的连通子集，这是因为对每个固定的$x$可令

$$\varphi_x:[0,+\infty)\to E^n,\ \lambda\mapsto\lambda x.$$

则φ_x连续，且$L_x=\varphi_x([0,+\infty))$，所以$L_x$连通．令

$$A_i=L_{a^i}-\{O\},\ B=E^n-\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

则B可表示成$B=\bigcup\limits_{x\in B}L_x$，由于$O\in\bigcap\limits_{x\in B}L_x$. 故$B$连通．

下证$\overline{B}=E^n$. 只需证$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subset\overline{B}$.

任取 $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，考虑 $C_x=\{y\in E^n\mid\|y\|=\|x\|\}$. 设 $B(x,\varepsilon)$ 为 x 的任一球形邻域，由于 $x\neq O$，则当 $\varepsilon<2\|x\|$ 时，$B(x,\varepsilon)\cap C_x$ 不可数，而 $B(x,\varepsilon)\cap C_x$ 与射线集 $\{L_y\mid y\in B(x,\varepsilon)\cap C_x\}$ 是一一对应的，所以 $\exists\ y\in B(x,\varepsilon)\cap C_x$ s. t. $L_y\notin\{L_{a_i}\mid i\in\mathbf{N}\}$，从而 $y\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，即 $y\in B$，这表明 $B(x,\varepsilon)\cap B\neq\varnothing$，所以 $x\in\overline{B}$，这就证明了 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subset\overline{B}$，故 $\overline{B}=E^n$. 于是便有

$$B\subset E^n-A\subset\overline{B}.$$

从而 E^n-A 连通.

［法二］ 令 $B_i=\mathbf{R}-p_i(A)$，p_i 为第 i 个投影，$i=1,2,\cdots,n$. $\forall\ b\in B_i$，令

$$S_i(b)=\mathbf{R}^{i-1}\times\{b\}\times\mathbf{R}^{n-i}=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\mid x_i=b\},$$

则 $S_i(b)\subset E^n-A$，且 $S_i(b)$ 与 E^{n-1} 同胚，故连通，现假定 E^n-A 不连通，则存在连续满射

$$f:E^n-A\to\{0,1\}$$

其中 $\{0,1\}$ 为离散空间. 由于 $S_i(b)$ 连通，故 $f|_{S_i(b)}$ 常值. 再令

$$S=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{b\in B_i}S_i(b).$$

因为当 $i\neq j$ 时，$\forall\ b\in B_i,c\in B_j,S_i(b)\cap S_j(c)\neq\varnothing$. 进而 $\forall\ i=1,2,\cdots,n$. 以及 $b,b'\in B_i$，任取 $j\neq i$ 与 $c\in B_j$ 有

$$S_i(b)\cap S_j(c)\neq\varnothing,\quad S_i(b')\cap S_j(c)\neq\varnothing$$

于是 $f|_S$ 是常值的. 不妨假定 $f(S)=\{1\}$，则

$$\exists\ x\in E^n-A\ \text{s. t.}\ x\notin S\ 且\ f(x)=0.$$

任取 x 的球形邻域 $B_{E^n}(x,\varepsilon)$，任意取定 i，$p_i(B_{E^n}(x,\varepsilon))=(x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon)$ 是不可数集，而 $p_i(A)$ 可数，故

$$\exists\ b\in(x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon)-p_i(A)\subset B_i.$$

于是

$$S_i(b)\cap B_{E^n}(x,\varepsilon)\neq\varnothing.$$

取 $y\in S_i(b)\cap B_{E^n}(x,\varepsilon)$，则 $f(y)=1$. 这就表明对 $f(x)=0$ 在 $\{0,1\}$ 中的邻域 $\{0\}$ 不存在 x 在 E^n-A 中的球形邻域 $B_{E^n}(x,\varepsilon)\cap(E^n-A)$ 能使

$$f(B_{E^n}(x,\varepsilon)\cap(E^n-A))\subset\{0\}$$

成立. 这与 f 的连续性矛盾. 所以 E^n-A 连通. □

2.1.8 设 $f:E^1\to E^1$ 连续. 证明 f 是单调的充要条件为 $\forall\ y\in f(E^1)$，$f^{-1}(\{y\})$ 是 E^1 的连通子集. 若删去 f 连续的条件，结论是否成立？给出证明或举反例.

证 (1) 设 f 是连续的，单调的，不妨假定 f 不减. $\forall\ y\in f(E^1)$. 不妨假定 $f^{-1}(\{y\})$ 多于一点.

若 $x_1<x_2$ 且 $\{x_1,x_2\}\subset f^{-1}(\{y\})$，则 $\forall\ a\in[x_1,x_2]$ 有

$$y=f(x_1)\leqslant f(a)\leqslant f(x_2)=y.$$

从而也有 $f(a)=y$. 所以 $f^{-1}(\{y\})$ 是区间. 因此连通.

反之，如果 f 连续且 $\forall\ y\in f(E^1)$，$f^{-1}(\{y\})$ 连通，要证 f 单调.

$\forall\ x_1,x_2\in E^1$，且 $x_1<x_2$. 我们首先证明：

(＊) 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则 $\forall\ z\in(x_1,x_2)$ 总有

$$f(x_1)\leqslant f(z)\leqslant f(x_2).$$

当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，由于 $f^{-1}(\{f(x_1)\})$ 是连通的，从而是包含 x_1,x_2 的区间，故 $\forall\ z\in(x_1,x_2)$ 有 $z\in f^{-1}(\{f(x_1)\})$. 即 $f(x_1)=f(z)=f(x_2)$. (＊)成立.

当 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，假定 $\exists\ z\in(x_1,x_2)$ s. t. $f(z)<f(x_1)$，则由介值定理可知取定 $y\in(f(z),f(x_1))$，$\exists\ x\in(x_1,z)$ s. t. $f(x)=y$. 即 $f^{-1}(\{y\})\cap(-\infty,z)\neq\varnothing$.

又 $y\in(f(z),f(x_2))$，故 $\exists\ x^*\in(z,x_2)$ s. t. $f(x^*)=y$. 即 $f^{-1}(\{y\})\cap(z,+\infty)\neq\varnothing$. 这与 $f^{-1}(\{y\})$ 的连通性矛盾.

所以 $\forall\ z\in(x_1,x_2)$，$f(x_1)\leqslant f(z)$.

同理可证

$$f(z)\leqslant f(x_2).$$

即(＊)成立.

类似地有：

(＊＊) 若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则 $\forall\ z\in(x_1,x_2)$ 总有

$$f(x_1)\geqslant f(z)\geqslant f(x_2).$$

现证 f 是单调的. 不妨假定 f 不是常值的. 即 $\exists\ a,b\in E^1$ s. t. $a<b$ 且 $f(a)\neq f(b)$.

若 $f(a)<f(b)$ 我们可证 f 不减.

$\forall\ x_1,x_2\in E^1$，考虑 x_1,x_2,a,b 的位置关系有下述 6 种情形：(假定 $x_1<x_2$)

(i) $x_1<x_2\leqslant a<b$，　　(ii) $x_1\leqslant a\leqslant x_2\leqslant b$，

(iii) $x_1\leqslant a<b\leqslant x_2$，　　(iv) $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，

(v) $a\leqslant x_1\leqslant b\leqslant x_2$，　　(vi) $a<b\leqslant x_1<x_2$.

对于(i) 先由(＊＊)可知 $f(x_1)<f(b)$，这是因为若 $f(x_1)\geqslant f(b)$，则由(＊＊) $f(x_1)\geqslant f(a)\geqslant f(b)$ 与 $f(a)<f(b)$ 矛盾. 进而由 $f(x_1)<f(b)$ 及(＊)可知

$$f(x_1)\leqslant f(a)<f(b).$$

再次利用(＊)得

$$f(x_1)\leqslant f(x_2).$$

对于(ii)－(vi)也类似地可得 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. 这就证明了 f 是不减的.

如果 $f(a)>f(b)$，则类似可证 f 是不增的，总之，f 是单调的.

(2) 如果删去 f 连续的条件，则命题的必要性部分仍然成立. 因为上述证明中没有用到 f 的连续性条件. 而充分性部分未必成立，有下述反例：

令 $f: E^1\to E^1$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,0)\\ 1 & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2} & x\in[1,+\infty).\end{cases}$$

则 $\forall\ y\in f(E^1)$，$f^{-1}(\{y\})$ 都连通，但 f 不是单调的. □

2.1.9 设 $\langle X,\rho\rangle$ 为多于一点的连通的度量空间，证明 X 不可数.

证 对本题先作一番分析：要证 X 不可数，就要设法找到一个不可数集，比如实数的某

个非退化的区间$[a,b]$，再构作一个满射，即得证．为此就联想到介值定理，它正好是说定义在连通空间上的连续函数，如果有两个不同的函数值，那么它的函数值必然要充满一个区间．所以我们现在的目标就转移到寻找一个适当的连续函数，这就促使我们想到借助于度量函数．正式证明如下：

取定$x\in X$，令$f: X\to E^1, y\mapsto\rho(x,y)$．由于$\rho: X\times X\to E^1$连续，所以$\rho|_{\{x\}\times X}$也连续，而$h: X\to\{x\}\times X, y\mapsto h(y)=\langle x,y\rangle$显然连续，所以

$$f=\rho|_{\{x\}\times X}\circ h$$

连续．又$f(x)=\rho h(x)=\rho(x,x)=0$，而$X$多于一点，故$\exists\ y\in X$ s.t. $y\neq x$．则

$$f(y)=\rho h(y)=\rho(x,y)>0$$

记$c=f(y)$，据介值定理就有

$$f(X)\supset[0,c].$$

所以X不可数．

注　如果利用积空间$X\times X$也连通的结果(C2.1.14)，上述证明可化简如下：因$\rho: X\times X\to E^1$连续，且至少有$x,y\in X$使$x\neq y$，ρ至少取两个值0与$c=\rho(x,y)>0$，由介值定理可见$\rho(X\times X)\supset[0,c]$，故$X\times X$不可数，从而$X$也不可数．

本题另有一个证明方法如下：

取$x,y\in X$使$x\neq y$．令$c=\rho(x,y)>0$，$\forall\ \varepsilon\in(0,c)$集

$$S_\varepsilon=\{z\in X\,|\,\rho(x,z)=\varepsilon\}\neq\varnothing.$$

否则$B_\rho(x,\varepsilon)$既开又闭．$B_\rho(x,\varepsilon)$为闭集可见B1.2.5后的注，读者可自行验证．这样就与X的连通性发生矛盾．从而$S_\varepsilon\neq\varnothing$．现令$S=\bigcup_{\varepsilon\in(0,c)}S_\varepsilon$，$\forall\ z\in S$，当$z\in S_\varepsilon$时，就令$f(z)=\varepsilon$，于是定义了一个满射$f: S\to(0,c)$．所以$S$不可数，从而$X$不可数．□

2.1.10 (1)　X中任一既开又闭的连通子集都是X的连通分支．

(2) 如果X只有有限个连通分支，那么X的每个连通分支都是既开又闭的．举例说明如果X有无限个连通分支，结论未必成立．

证　(1) 设C为X的既开又闭的连通子集，A为X的连通分支且$C\subset A$，则C在子空间A中也是既开又闭的．因A连通且$C\neq\varnothing$，故必有$C=A$，即C是X的连通分支．

(2) 设$X=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$，其中$C_i(\forall\ i)$为X的连通分支．由于$\forall\ i$，C_i闭于X，从而$\forall\ j=1,2,\cdots,n$，$\bigcup_{i\neq j}C_i$也闭于X，又因不同的连通分支不相交，故$C_j=\mathscr{C}\bigcup_{i\neq j}C_i$开于$X$，即$C_j$是既开又闭的$(\forall\ j=1,2,\cdots,n)$．

当X有无限个连通分支时，结论未必成立．例如$X=\mathbf{Q}$作为E^1的子空间．$\forall\ x\in\mathbf{Q}$，$\{x\}$为连通分支，但不是$\mathbf{Q}$的开子集．□

注　在§2.3还将看到当X局部连通时，它的每个连通分支都是既开又闭的．

2.1.11　设$h: X\to Y$为同胚映射．证明X的连通分支C在h下的像$h(C)$是Y的连通分支．

证　首先$h(C)$是Y的连通子集．若有Y的连通子集B使$h(C)\subset B$．则$h^{-1}(B)$是X的包含C的连通子集，所以$h^{-1}(B)=C$．从而$B=h(C)$．即$h(C)$为Y的连通分支．□

如果我们把空间中属于同一连通子集的两个点叫做等价的，于是就得等价关系．每个

等价类就是一个连通分支．我们用 c_1, c_2 分别表示 X, Y 上的这种等价关系．

2.1.12　设 $f: X \to Y$ 为连续映射．令

$$\varphi: X/c_1 \to Y/c_2,\ c_1[x] \mapsto c_2[f(x)].$$

其中 $c_1[x], c_2[f(x)]$ 分别表示 X 中以 x 为代表的等价类及 Y 中以 $f(x)$ 为代表的等价类，也就是分别为 X 中包含 x 的连通分支与 Y 中包含 $f(x)$ 的连通分支．验证这样定义的 φ 是有意义的，且当 f 为同胚时，φ 为一一映射．

证　设 $c_1[x_1]=c_1[x_2]$，则 $\{x_1, x_2\} \subset c_1[x_1]$. 于是

$$\{f(x_1), f(x_2)\} \subset f(c_1[x_1]),$$

由 $f(c_1[x_1])$ 连通，且

$$f(x_2) \in f(c_1[x_1]) \cap c_2[f(x_2)],$$

故

$$f(c_1[x_1]) \subset c_2[f(x_2)],$$

又

$$f(x_1) \in f(c_1[x_1]) \subset c_2[f(x_2)].$$

所以

$$c_2[f(x_1)] \cap c_2[f(x_2)] \neq \varnothing.$$

从而

$$c_2[f(x_1)] = c_2[f(x_2)].$$

这就证明了 φ 的定义与每个 $c_1[x]$ 的代表元的选取无关，即 φ 是一意的．完全确定了一个映射．

如果 f 是同胚，则由

$$\psi: Y/c_2 \to X/c_1,\ c_2[y] \mapsto c_1[f^{-1}(y)].$$

确定的映射 ψ 显然是 φ 的逆．所以 φ 是一一的．　□

注　这道题表明拓扑空间的连通分支的基数是拓扑不变量．另外，我们称 x 为 X 的割点当且仅当 $X-\{x\}$ 不连通，容易证明拓扑空间的割点数也是拓扑不变量．它们常可用来否定拓扑空间之间的同胚关系．

2.1.13　证明 $E^n(n\geqslant 2)$ 与 E^1 的任何子集都不同胚．$E^n(n\geqslant 2)$ 与 S^1 的任何子集也不同胚．

证　(1)　由 B2.1.7 知 $E^n(n\geqslant 2)$ 无割点，若 E^1 的子集 A 与 E^n 同胚，则 A 连通，故必为区间．显然 A 有割点，产生矛盾，所以 E^1 的任何子集都不与 $E^n(n\geqslant 2)$ 同胚．

(2)　如果有 S^1 的某个真子集 A 与 E^n 同胚，不妨假定 $A \subset S^1-\{\langle 0,1\rangle\}$，而 $S^1-\{\langle 0,1\rangle\}$ 与 E^1 同胚，从而 A 也同胚于 E^1 的某个子集 B，于是 E^n 就与 E^1 的子集 B 同胚，与(1)矛盾．所以 E^n 与 S^1 的任一真子集都不同胚．

(3)　再若 $E^n(n\geqslant 2)$ 与 S^1 同胚，则 $E^n-\{\langle 1,0,\cdots,0\rangle\}$ 与 $S^1-\{p\}$（其中 p 为 $\langle 1,0,\cdots,0\rangle$ 的同胚像）同胚．而 $S^1-\{p\}$ 是与 E^1 同胚的．故有割点，但 $E^n-\{\langle 1,0,\cdots,0\rangle\}$ 无割点，又引起矛盾．所以 $E^n(n\geqslant 2)$ 与 S^1 也不同胚．　□

2.1.14　设 x, y 为 X 中任意两点，若 X 连通就说 x 与 y 等价；否则，当对于 X 的任何一个分解 $\{A, B\}$，x 与 y 总在这个分解的同一个集合时（换句话讲 X 的任何一个分解都不能

把 x 与 y 拆开），就说 x 与 y 等价，这个关系显然是 X 上的等价关系，由此决定的等价类叫做 X 的一个拟连通分支．证明：

(1) X 连通$\Leftrightarrow X$ 只有一个拟连通分支．

(2) 包含点 p 的拟连通分支恰好等于所有包含 p 的既开又闭的子集的交．

(3) X 的每个连通分支总包含在某个拟连通分支内．

证 (1) 显然．

(2) 若 X 连通，结论显然．现假定 X 不连通，A 为包含 p 的既开又闭的真子集，$B=\mathscr{C}A$，则 $\{A,B\}$ 是 X 的一个分解．又设 Q 是包含 p 的拟连通分支，则 $Q\subset A$. 所以

$$Q\subset\bigcap\{C\subset X\mid p\in C, C\text{ 既开又闭}\},$$

反之，若 $q\in\bigcap\{C\subset X\mid p\in C, C\text{ 既开又闭}\}$，则对 X 的任一分解 $\{A,B\}$，如果 $p\in A$，因 A 既开又闭，故必有 $q\in A$，则 q 与 p 等价，故 $q\in Q$，于是

$$\bigcap\{C\subset X\mid p\in C, C\text{ 既开又闭}\}\subset Q.$$

于是(2)得证．

(3) 设 C 为 X 的连通分支，任取 $p\in C$，Q 为包含 p 的拟连通分支．我们证 $C\subset Q$.

任取 X 中包含 p 的既开又闭的子集 A，因为 C 连通，且 $C\cap A\neq\varnothing$，故必有 $C\subset A$. (C2.1.3)于是由(2)知 $C\subset Q$. □

C 练习题

2.1.1 判断下列拓扑空间是否连通：

(1) $X=\{1,2,3\}$， $\tau=\{\varnothing,\{1\},\{2,3\},X\}$.

(2) $X=\{1,2\}$， $\tau=\{\varnothing,\{1\},X\}$.

(3) $X=\{1,2,\cdots,n\}$， $\tau=\{\varnothing,A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ $(n>1)$，

其中 $A_i=\{1,2,\cdots,i\}$，$i=1,2,\cdots,n$.

(4) $X=\mathbf{N}$，$\tau=\{\varnothing,B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots\}$. 其中 $B_n=\{n,n+1,\cdots\}$，$n\in\mathbf{N}$.

2.1.2 设 τ,τ^* 为 X 的两个拓扑，且 $\langle X,\tau\rangle$ 连通，如果 $\tau^*\subset\tau$，则 $\langle X,\tau^*\rangle$ 是否也连通？如果 $\tau\subset\tau^*$ 又如何？给出证明或举反例．

2.1.3 设 A 为 X 的连通子集，B 为既开又闭的子集，证明：若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $A\subset B$.

2.1.4 设 C 为 X 的连通子集，证明：若 A,B 为 X 的不相交的开集（闭集）使 $C\subset A\cup B$. 则 $C\subset A$ 或 $C\subset B$.

2.1.5 设 C_1,C_2 均为 X 的连通子集．证明：如果 C_1,C_2 不是隔离的，那么 $C_1\cup C_2$ 也连通．

2.1.6 设 A 为连通空间 X 的真子集，证明：若 $A\neq\varnothing$，则 $\mathrm{Bd}A\neq\varnothing$.

2.1.7 证明：

(1) E^2 中所有至少有一个坐标是有理数的点构成的集合 C 连通．

(2) E^2 中所有第二个坐标为有理数的点构成的集 A 不连通．

2.1.8 在 E^2 中，令

$$L_n = \{\langle x,y\rangle \mid y = \frac{1}{n}x,\ x \in [0,1]\},$$

$$L_0 = [0,1] \times \{0\}.$$

证明:$\forall\ A \subset L_0, C \overset{\text{def}}{=\!=} A \cup (\bigcup_{n\in\mathbf{N}} L_n)$连通．特别地,当 $A=L_0$ 时,称此空间为闭扫帚空间．

2.1.9　设 A 为 $S^n(n\geqslant 2)$的可数子集,证明:S^n-A 连通．

2.1.10　设 $f: E^n \to E^1$ 连续,$n\geqslant 2$,证明:E^1 中至多有两个点在 f 下的原像是非空可数集(将 E^n 换成 S^n,结论仍然成立).

2.1.11　设 $h: S^1 \to S^1$ 连续且 $h\circ h = id_{S^1}$. 证明:

(1) h 是同胚.

(2) 对任一连续映射 $f: S^1 \to E^1$,总存在 $z\in S^1$ 使 $f(z)=f\circ h(z)$.

注　当 h 定义为$\forall\ x\in S^1, h(x)=-x$ 时,(2)的结果就是一维的 Borsuk-Ulam 定理．对于高维情形则需要代数拓扑的知识才能证明．

2.1.12　设 G 为 X 的连通开集,证明 G 为子空间 $S=\mathscr{C}(\mathrm{Bd}G)$的连通分支．

2.1.13　设 A 为 X 的开子空间 G 的连通分支．证明:如果 G 只有有限个连通分支,那么

$$\mathrm{Bd}_X A \subset \mathrm{Bd}_X G.$$

如果删去"G 只有有限个连通分支"这一条件,结论是否仍然成立?给出证明或举反例．

2.1.14　证明积空间 $X\times Y$ 连通$\Leftrightarrow X,Y$ 都连通．

2.1.15　判断 E^2 的子空间 $A=(\mathbf{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbf{R})$与 E^1 是否同胚?又 A 与 E^2 中两相切的圆周构成的子空间(8 字形空间)是否同胚?

§2.2　道路连通空间

A　内容提要

2.2.1 定义　设 $x,y\in X$,如果 $f:[0,1]\to X$ 连续,并使 $f(0)=x, f(1)=y$,则称 f 为 X 中连接 x 与 y 的一条道路．如果 X 中任意两点都有 X 中一条道路相连,就叫 X 是道路连通的．X 的子集 P 作为子空间是道路连通的,就叫 P 为道路连通子集,X 的一个极大的道路连通子集叫道路连通分支．

E^n 的凸集(B1.1.11),特别地 E^n 本身是道路连通的．

2.2.2 定理　道路连通空间必连通,道路连通性能被连续映射保持．

B　例题

(一)

道路连通的条件比连通性更强,它的直观性更鲜明．尽管有不少结果在形式上与连通

性类似，但毕竟这是两个不同的概念，彼此间有不少差异．比如 B2.2.4 的注所揭示的．在解题方法上，关键是考察道路的存在性问题，关于几条道路拼接的方法应掌握．

2.2.1 证明

(1) 如果 X 道路连通，则 $\forall\ x,y\in X$ 以及任一实数的区间 $[a,b]$ $(a<b)$，存在 $f:[a,b]\to X$ 连续，使 $f(a)=x, f(b)=y$.

(2) 如果 $\forall\ x,y\in X$，存在实数的某个区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 以及 $f:[a,b]\to X$ 连续，使 $f(a)=x, f(b)=y$. 则 X 道路连通．

证 (1) $\forall\ x,y\in X$ 以及 $[a,b]\subset\mathbf{R}$，首先由道路连通的定义可知 $\exists\ g:[0,1]\to X$ 连续，s.t. $g(0)=x, g(1)=y$. 令

$$h:[a,b]\to[0,1],\ t\mapsto\frac{1}{b-a}(t-a).$$

则 $f=gh:[a,b]\to X$ 连续，且

$$f(a)=gh(a)=g(0)=x,\ f(b)=gh(b)=g(1)=y.$$

(2) $\forall\ x,y\in X$ 有某个区间 $[a,b]$，以及 $f:[a,b]\to X$ 连续，使 $f(a)=x,\ g(b)=y$. 令

$$h:[0,1]\to[a,b],\ t\mapsto(b-a)t+a.$$

则 $g=f\circ h:[0,1]\to X$ 连续，且 $g(0)=fh(0)=f(a)=x, g(1)=fh(1)=f(b)=y$. g 是连接 x,y 的一条道路，所以 X 是道路连通的． □

由这一道题的结果，可用任意的非退化的闭区间 $[a,b]$ 代替道路定义中的 $[0,1]$，从而给解题带来很多方便．

2.2.2 设 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 X 的道路连通的子集族．$\forall\ \lambda,\mu\ \exists\ \{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\subset\Lambda$ s.t. $\lambda_1=\lambda,\lambda_n=\mu$，且 $\forall\ i=1,2,\cdots,n-1$，$P_{\lambda_i}\cap P_{\lambda_{i+1}}\neq\varnothing$，证明 $P=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda$ 是 X 的道路连通子集．

证 任取 $x,y\in P$，假定 $x\in P_\lambda$，$y\in P_\mu$，则 $\exists\ \{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}\subset\Lambda$ s.t. $\lambda_1=\lambda,\lambda_n=\mu$ 且 $P_{\lambda_i}\cap P_{\lambda_{i+1}}\neq\varnothing$. 我们取 $x_i\in P_{\lambda_i}\cap P_{\lambda_{i+1}}$. 则存在

$$f_1:[0,1]\to P_{\lambda_1}\ \text{连续，使}\ f_1(0)=x,\ f_1(1)=x_1.$$

又 $\forall\ i=1,2,\cdots,n-2$，$\exists\ f_{i+1}:[0,1]\to P_{\lambda_{i+1}}$ 连续，使

$$f_{i+1}(0)=x_i,\ f_{i+1}(1)=x_{i+1}$$

又存在 $f_n:[0,1]\to P_\mu$ 连续，使 $f_n(0)=x_{n-1}$，$f_n(1)=y$. $\forall\ t\in[0,1]$ 令

$$f(t)=\begin{cases} f_1(nt) & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{n} \\ f_i(nt-i+1) & \dfrac{i-1}{n}\leqslant t\leqslant\dfrac{i}{n} \\ & i=2,3,\cdots,n. \end{cases}$$

则由粘合引理可知如上定义的 $f:[0,1]\to P$ 连续且 $f(0)=f_1(0)=x$，$f(1)=f_n(1)=y$. 所以 f 是 P 中连接 x,y 的一条道路，故 P 道路连通． □

注 本题中给出的道路的拼接技术，特别是当 $n=2,3$ 的情形应熟练地掌握，这不仅是对解有关道路连通的习题有好处，而且对于学习代数拓扑中的同伦论也是有益的．

如果利用 B2.1.1 的结果，则可取 f_1 如上所述，对 $i=2,3,\cdots,n$. 则 $\exists\ f_i:[i-1,i]\to P_{\lambda_i}$ 连续，使 $f_i(i-1)=x_{i-1}$，$f_i(i)=x_i$.（其中 $x_n=y$）. 令 $f:[0,n]\to P$ 使 $f|_{[i-1,i]}=f_i$，$i=1,2,$

$\cdots,n$. 由粘合引理可知 f 连续．且 $f(0)=x$，$f(n)=x_n=y$. 由 B2.1.1(2)知 P 道路连通．在这里将 f_i 拼接起来的技术要简单得多了．

2.2.3　设 $A\subset E^2$ 为可数集，证明 E^2-A 是道路连通的．

证　设 $x,y\in E^2-A$，不妨设 $x\neq y$，L 为线段 $\overline{xy}$ 的中垂线．当 $z\in L$ 时，连接折线段 $\overline{xzy}$，则当 $z_1\neq z_2$ 时，$\overline{xz_1y}$ 与 $\overline{xz_2y}$ 只有 x,y 公共．由于 A 可数，而折线段的集合 $\{\overline{xzy}|z\in L\}$ 不可数．因此一定存在一条折线段 $\overline{xz_0y}$ 不含 A 的点，这条折线段用连续映射表示出来就得 E^2-A 中连接 x,y 的道路．具体地，可令

$$f_1:[0,1]\to E^2-A,\quad t\mapsto(1-t)x+tz_0;$$

$$f_2:[0,1]\to E^2-A,\quad t\mapsto(1-t)z_0+ty.$$

定义 $f:[0,1]\to E^2-A$ 为

$$f(t)=\begin{cases} f_1(2t)=(1-2t)x+2tz_0 & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2} \\ f_2(2t-1)=(2-2t)z_0+(2t-1)y & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

则 f 为 E^2-A 中连接 x,y 的道路．　□

2.2.4　令

$$K=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbf{N}\},$$

$$C=([0,1]\times\{0\})\cup(K\times[0,1])\cup(\{0\}\times[0,1]),$$

$$D=C-(\{0\}\times(0,1)).$$

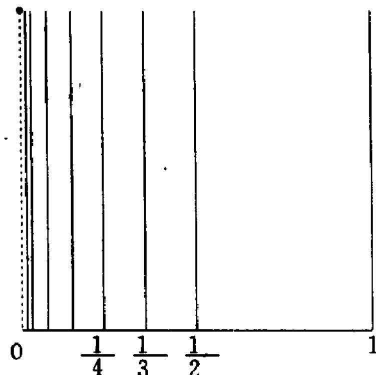


图 2.2.1

C 作为 E^2 的子空间叫做梳子空间，子空间 D 叫做缺边梳子空间．证明：C 道路连通而 D 连通却非道路连通．

证　C 显然道路连通．令 $p=\langle 0,1\rangle$，则 $D-\{p\}$ 也道路连通．从而连通，又 $\mathrm{Cl}_C(D-\{p\})=C$，$D-\{p\}\subset D\subset C$，所以 D 也连通．下证非道路连通．

假定 $f:[0,1]\to D$ 是 D 中连接 p 与某一点 $q\in D-\{p\}$ 的道路．显然 $f^{-1}(\{p\})$ 是 $[0,1]$ 的闭集，且 $0\in f^{-1}(\{p\})$，$1\notin f^{-1}(\{p\})$. 我们再证 $f^{-1}(\{p\})$ 也是 $[0,1]$ 的开集．

考虑 p 在 D 中的邻域 V 使 $V\cap([0,1]\times\{0\})=\varnothing$.

$\forall\ t_0\in f^{-1}(\{p\})\exists\ U=(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap[0,1]$ s.t. $f(U)\subset V$. 由于 U 仍为 $\mathbf{R}$ 的区间，故连通，所以 $f(U)$ 连通．

我们证 $U\subset f^{-1}(\{p\})$.

若不然，$\exists\ t\in U$ s.t. $f(t)\neq p$. 设

$$f(t)\in V\cap(\{\frac{1}{n}\}\times[0,1])\qquad(\text{总有这样的 } n)$$

令

$$A = f(U) \cap \left(\bigcup_{k\leqslant n}(\{\frac{1}{k}\} \times [0,1])\right),$$

$$B = f(U) \cap \left(\{p\} \cup \left[\bigcup_{k>n}(\{\frac{1}{k}\} \times [0,1])\right]\right).$$

则 $f(t)\in A$, $p\in B$,即 A,B 均非空．于是易见$\{A,B\}$是 $f(U)$的一个分解．与 $f(U)$的连通性矛盾．所以$\exists\, U\in \mathscr{V}_{[0,1]}(t_0)$ s.t. $U\subset f^{-1}(\{p\})$. 这就证明了 $f^{-1}(\{p\})$开于$[0,1]$. 于是 $f^{-1}(\{p\})$是$[0,1]$的一个非空的既开又闭的真子集．与$[0,1]$的连通性矛盾．这就证明了 D 中不存在连接 p 与 $D-\{p\}$中任何一点的道路．从而 D 不是道路连通的． □

注　这里不仅给出了一个连通而非道路连通的例子 D,更进一步说明了拓扑空间 D 的道路连通分支 $D-\{p\}$不是 D 的闭集．并且 $D-\{p\}$在 D 中的闭包 $\mathrm{Cl}_D(D-\{p\})=D$ 也不是道路连通的,这表明连通与道路连通具有不同的性质．

2.2.5　令 $A=\{0\}\times[-1,1]$, $B=\{\langle x,y\rangle\in E^2\,|\,y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leqslant 1\}$, $X=A\cup B$. X 作为 E^2 的子空间,叫做闭拓扑正弦曲线．证明 X 连通但非道路连通．

证　B 的道路连性是容易看到的．事实上,$g:(0,1]\to B$, $x\mapsto\langle x,\sin\frac{1}{x}\rangle$ 是连续的满射．$(0,1]$是道路连通的,故 B 道路连通．由于 $\mathrm{Cl}_X B=X$,故 X 连通．下证 X 不是道路连通的．

假设 $f:[0,1]\to X$ 是连接原点 O 与 B 中某一点 $p=\langle x_0,y_0\rangle$的一条道路．显然 $f^{-1}(\{O\})$是$[0,1]$的闭集．再证 $f^{-1}(\{O\})$也是$[0,1]$的开集．

考虑 O 的邻域 $V=B_{E^2}(O,\frac{1}{2})\cap X$. $\forall\ t_0\in f^{-1}(\{O\})$, $\exists\ U=(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap[0,1]$ s.t. $f(U)\subset V$,且 $f(U)$连通,我们证 $U\subset f^{-1}(\{O\})$. 若$\exists\ t\in U$ s.t. $f(t)\neq O$,可设 $f(t)=\langle x_1,y_1\rangle$,其中 x_1 对某个固定的 $k\in\mathbf{N}$ 有

$$\left(\frac{1}{2}\pi+(2k+1)\pi\right)^{-1}<x_1<\left(\frac{1}{2}\pi+2k\pi\right)^{-1},$$

则令

$$C=\left\{\langle x,y\rangle\in f(U)\,|\,x<\left(\frac{1}{2}\pi+(2k+1)\pi\right)^{-1}\right\}$$

$$D=\left\{\langle x,y\rangle\in f(U)\,|\,x>\left(\frac{1}{2}\pi+(2k+1)\pi\right)^{-1}\right\}$$

就有 $O\in C$, $f(t)\in D$,$\{C,D\}$是 $f(U)$的一个分解. 其它情况类似．总之要与 $f(U)$的连通性矛盾．所以 $U\subset f^{-1}(\{O\})$,这就证明了 $f^{-1}(\{O\})$也是$[0,1]$的开集．而 $f^{-1}(\{O\})$是$[0,1]$的非空真子集,这就与$[0,1]$的连通性矛盾．因此上述 f 是不存在的．也就是 X 不是道路连通的． □

注　这里再次看到 X 的道路连通分支 B 不是 X 的闭集．作为 X 的道路连通子集 B 在 X 中的闭包 $\mathrm{Cl}_X B=X$ 不是道路连通的．

2.2.6　设 X 为可数无限集,τ 为有限补拓扑．证明$\langle X,\tau\rangle$连通而非道路连通．

证　由于 X 的任意两个非空真子闭集 F_1,F_2 都是有限集,所以 $F_1\cup F_2\neq X$,即 X 没有分解,故 X 连通．

现设 $a,b\in X$，$a\neq b$. 若存在连续映射

$$f:[0,1]\to X \text{ 使 } f(0)=a,\ f(1)=b.$$

由于 $\forall\ x\in X$，$f^{-1}(\{x\})$ 都闭于 $[0,1]$，于是 $[0,1]$ 可表示成可数个（且至少两个）互不相交的非空闭集之并．我们证明这是不可能的．

首先，$[0,1]$ 显然不能表示成两个以上的有限个互不相交的非空闭集之并，否则与 $[0,1]$ 的连通性矛盾．

现在假定 $[0,1]=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}F_n$，其中当 $n\neq m$ 时，$F_n\cap F_m=\varnothing$，每个 F_n 都是 $[0,1]$ 的非空闭集．

不妨假设 $1\notin F_0$，并设 $a_0=\sup F_0$（显然 $a_0\in F_0$）. 设

$$n_0=\min\{n\in\mathbf{N}\mid[a_0,1]\cap F_n\neq\varnothing\},$$

记 $b_0=\inf([a_0,1]\cap F_{n_0})$，则由 $a_0\in F_0$ 得 $a_0\notin F_{n_0}$，所以 $a_0<b_0$. 令 $A_0=[a_0,b_0]$，则 $F_0\cap A_0=\{a_0\}$，$F_{n_0}\cap A_0=\{b_0\}$，当 $0<n<n_0$ 时，$F_n\cap A_0=\varnothing$，故有 $\forall\ n\leqslant n_0$，$F_n\cap A_0\subset\{a_0,b_0\}$. 再设

$$m_1=\min\{n\in\mathbf{N}\mid n>n_0 \text{且 } F_n\cap A_0\neq\varnothing\},$$

$$a_1=\sup(F_{m_1}\cap A_0),$$

$$n_1=\min\{n\in\mathbf{N}\mid n>m_1 \text{且 } F_n\cap[a_1,b_0]\neq\varnothing\},$$

$$b_1=\inf(F_{n_1}\cap[a_1,b_0]).$$

易见

$$a_0<a_1<b_1<b_0,\quad 0<n_0<n_1.$$

记 $A_1=[a_1,b_1]$，则与上面类似地，$\forall\ n\leqslant n_1$，$F_n\cap A_1\subset\{a_1,b_1\}$.

如此继续，利用数学归纳法，得整数序列与实数序列如下：

$$0<n_0<n_1<n_2\cdots<n_i<\cdots$$

$$0\leqslant a_0<a_1<a_2<\cdots<a_i<\cdots<b_i<\cdots b_2<b_1<b_0\leqslant 1,$$

且 $\forall\ i\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，当 $n\leqslant n_i$ 时，$F_n\cap[a_i,b_i]\subset\{a_i,b_i\}$.

由数学分析知识可知 $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}[a_i,b_i]\neq\varnothing$.

设 $x\in\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}[a_i,b_i]$，显然 $\forall\ i\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，$x\neq a_i$，$x\neq b_i$.

现若 $x\in F_n$，因 $\exists\ n_i$ s.t. $n<n_i$，于是 $x\in F_n\cap[a_i,b_i]\subset\{a_i,b_i\}$. 就有 $x=a_i$ 或 $x=b_i$ 引起矛盾，这就证明了 $[0,1]$ 不可能表示成可数个（至少两个）互不相交的非空闭集之并．从而也就证明了 X 不是道路连通的． □

2.2.7　设 X 为不可数集，τ 为有限补拓扑，证明 $\langle X,\tau\rangle$ 是道路连通的．

证　$\forall\ x,y\in X$，$\exists\ A\subset X$ s.t. $\{x,y\}\subset A$ 且 $\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}[0,1]$. 假设 $g:[0,1]\to A$ 为一一映射，且 $g(0)=x$，$g(1)=y$. $i_A:A\to X$ 为包含映射，则 $f=i_A\circ g:[0,1]\to X$ 就是 X 中连接 x,y 的道路．事实上，只要证明 f 连续．

设 F 为 X 的任一真子闭集，则 F 为有限集，于是 $f^{-1}(F)$ 是 $[0,1]$ 的有限集，故为闭集，所以 f 连续． □

（二）常见错误分析

2.2.8　设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为拓扑空间，证明积空间 $X=\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 道路连通 $\Leftrightarrow\ \forall\ i=1,$

$2,\cdots,n,X_i$ 道路连通．

请看下述证明有何错误．

“$\Rightarrow$” 由于$\forall\ i$，$p_i:X\to X_i$ 是连续满射，道路连通性能被连续映射保持．所以每个 X_i 也道路连通．

“$\Leftarrow$” $\forall\ \langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle,\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle\in X$，由于每个 X_i 都道路连通，故存在 $f_i:X_i\to[0,1]$ 连续，使 $f_i(x_i)=0$，$f_i(y_i)=1$．令

$$g=f_i\circ p_i:X\to[0,1]$$

则 g 连续，且

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_i\circ p_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_i(x_i)=0,$$
$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=f_i\circ p_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)=f_i(y_i)=1,$$

所以 X 道路连通

分析　上述证明的第一部分是正确的．第二部分则是错的．作为道路的连续映射是定义在单位闭区间$[0,1]$上的，取值于 X 中，而不是相反．你可以把 X 想像为 E^n，f 想像为曲线的参数方程，$[0,1]$是参数的取值范围，这样你就不会搞错了．这是上述证明中的主要错误．此外，用 $g=f_i\circ p_i$ 来定义 g，其中的 i 到底是哪一个呢？如果 i 固定就推不出所需的结论了，如果像上面那样可以随需要而变化的，那么这个 g 就不确定了，所以这样来定义 g 也是错误的．

正确的证明如下：

［法一］ $\forall\ \langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$，$\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle\in X$，由于$\forall\ i$，$X_i$ 道路连通，故存在 $f_i:[0,1]\to X_i$ 连续，使

$$f_i(0)=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle,\qquad f_i(1)=\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle.$$

令 $f:[0,1]\to X$ 为$\forall\ t\in[0,1]$

$$f(t)=\langle f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)\rangle.$$

则因 $p_if=f_i(\forall\ i)$，故由 B1.7.8 知 f 连续且 $f(0)=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$，$f(1)=\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle$．所以 f 是 X 中连接 x 与 y 的一条道路．

［法二］ 先对 $n=2$ 证明如下：取定 $x_1\in X_1$，则

$$X_1\times X_2=(\{x_1\}\times X_2)\cup(\bigcup_{x_2\in X_2}(X_1\times\{x_2\})).$$

由于$\{x_1\}\times X_2$ 与 X_2 同胚，每个 $X_1\times\{x_2\}$与 X_1 同胚．所以它们都是道路连通的．并易见满足 B2.2.2 的条件，所以 $X_1\times X_2$ 道路连通．

再者由于 $\prod_{i=1}^{n}X_i$ 与$\left(\prod_{i=1}^{n-1}X_i\right)\times X_n$ 同胚，故由数学归纳法可知对任意的 n，结论都成立．

□

C　练习题

2.2.1　证明 E^1 的子集 P 是道路连通的$\Leftrightarrow P$ 是连通的．

2.2.2　判断 E^2 的下列子集是否道路连通：

(1) $A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y$ 中至少有一个为有理数$\}$,

(2) $B=\{\langle x,y\rangle \mid x=0$ 或 $y\in\mathbf{Q}\}$

(3) $C_0=S\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}L_n)$,其中 $S\subset[0,1]\times\{0\}$ 且 $S\neq\varnothing$, $L_n=\{\langle x,y\rangle \mid y=\frac{1}{n}x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

一般地 $S=(\frac{1}{2},1]\times\{0\}$时,叫 C_0 为扫帚空间.

2.2.3 试求 E^2 的子空间

$$Y = D\cup(\{0\}\times([0,1]\cap(\mathbf{R}-\mathbf{Q})))$$

的道路连通分支,其中 D 为缺边梳子空间.

2.2.4 试求 Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$ 的连通分支与道路连通分支.

§2.3 局部连通与局部道路连通

A 内容提要

2.3.1 定义 拓扑空间 X 叫做在点 $x\in X$ 处局部连通(相应地,局部道路连通)的,如果 $\forall\, U\in\mathscr{N}(x)$存在连通(相应地,道路连通)开集 G 使 $x\in G\subset U$. 当 X 在每点一处都局部连通(局部道路连通)时,就叫 X 是局部连通(局部道路连通)空间. X 的子集 S 叫做局部连通(局部道路连通)子集,如果 S 作为子空间是局部连通(局部道路连通)的空间.

2.3.2 定理 $\langle X,\tau\rangle$局部连通(相应地,局部道路连通)$\Leftrightarrow X$ 的每个开子空间的连通分支(相应地,道路连通分支)开于 X.

2.3.3 局部道路连通空间的连通分支与道路连通分支相同.

B 例题

(一)

局部连通与局部道路连通这两个概念与前两节的连通与道路连通之间,一般地没有蕴涵关系. 局部连通与局部道路连通一般不被连续映射保持,但能被连续的开映射保持,它们对开子空间是遗传的. 在解题时,除了直接用定义的条件外,A2.3.2 的特征性质是很有用的.

2.3.1 证明 X 局部连通$\Leftrightarrow\forall\, x\in X$ 以及 $U\in\mathscr{N}(x)$总存在一个连通邻域 $V\in\mathscr{N}(x)$使 $V\subset U$.

证 "$\Rightarrow$" 显然.

"$\Leftarrow$" 设 G 为 X 的任一开子空间,C 为 G 的任一连通分支. 我们证明 C 为 X 的开集. $\forall\, x\in C\subset G$,由于 $G\in\mathscr{N}_X(x)$,故$\exists\, V\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. V 连通且 $V\subset G$. 现在 $x\in V\cap C$,V

与 C 又都是 G 的连通子集，而 C 是 G 的连通分支，所以 $V\subset C$，故 $x\in \mathring{C}=\mathrm{Int}_X C$，于是 C 开于 X，由 A2.3.2 知 X 是局部连通的．□

注　本题给出的局部连通性的条件，在有些著作中，就作为局部连通空间的定义．但要注意，就整个空间而言两者是等价的，如果仅限于某个固定的点 x_0 处是不等价的．下面的无限扫帚就是一例．

如果 $\forall\, U\in \mathscr{N}(x)\ \exists\, V\in \mathscr{N}(x)$ s.t. V 连通且 $V\subset U$，则称空间 X 在点 x 处是小范围连通的．B2.3.1 是说：X 局部连通 $\Leftrightarrow X$ 在每一点处都是小范围连通的．

2.3.2　设 $L_{n,m}$ 为 E^2 中连接 $\langle \frac{1}{n},0\rangle$ 与 $\langle \frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{m}\rangle$ 的闭线段，$n,m\in \mathbf{N}$. 再令

$$L_n=(\bigcup_{m\in \mathbf{N}} L_{n,m})\cup\left([\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\times\{0\}\right)$$

$$X=(\bigcup_{n\in \mathbf{N}} L_n)\cup\{\langle 0,0\rangle\}.$$

我们称 X(作为 E^2 的子空间)为无限扫帚．证明：X 在原点 $O=\langle 0,0\rangle$ 处是小范围连通的，但不是局部连通的

证　对于原点 O 的任一球形邻域

$$B(O,\varepsilon)=\{x\in X\mid \|x\|<\varepsilon\}$$

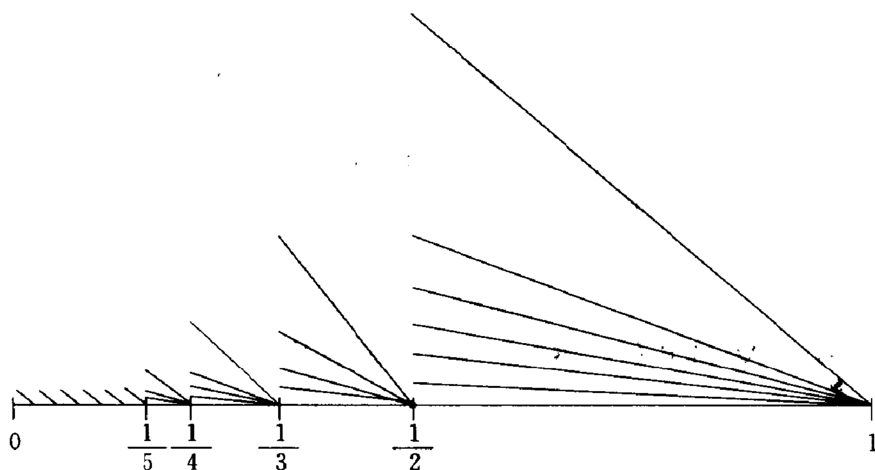


图 2.3.1

$\exists\, n\in \mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{n}<\varepsilon$. 则 $\overline{B(O,\frac{1}{n})}\in \mathscr{N}_X(O)$ 且 $\overline{B(O,\frac{1}{n})}\subset B(O,\varepsilon)$，这里闭包是指在 X 中取闭包．易见，

$$\overline{B(O,\frac{1}{n})}=(\bigcup_{i=n}^{\infty} L_i)\cup\{\langle 0,0\rangle\},$$

它是连通的．所以 X 在 O 处是小范围连通的．

不过包含原点的任一连通开集必须包含每个点 $\langle \frac{1}{n},0\rangle$，从而只有 X 本身才是包含 O 点的连通开集．所以在 O 处不是局部连通的．□

2.3.3　证明 X 局部连通 $\Leftrightarrow \forall\, x\in X$ 以及 $U\in \mathscr{N}(x)$，U 的包含 x 的连通分支也是 x 的邻域．

证 “$\Rightarrow$” 设 C_x 为 U 的包含 x 的连通分支，由局部连通性，$\exists\ G\in\tau_X$ s.t. G 连通且 $x\in G\subset U$. 由于 $x\in G\cap C_x$，又 G,C_x 都是 U 的连通子集，且 C_x 是连通分支，所以 $G\subset C_x$，从而 $C_x\in\mathscr{N}_X(x)$.

“$\Leftarrow$” 设 G 为 X 的任一开子空间，C 是 G 的连通分支，$\forall\ x\in C$，有 $G\in\mathscr{N}_X(x)$，据假设条件，也有 $C\in\mathscr{N}_X(x)$，故 C 开于 X. 从而 X 是局部连通的． □

2.3.4 证明闭扫帚空间 $C=([0,1]\times\{0\})\cup(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}L_n)$，其中

$$L_n=\{\langle x,y\rangle\in E^2\,|\,y=\frac{1}{n}x,x\in[0,1]\},n\in\mathbf{N},$$

是道路连通的，但非局部连通的．类似地，扫帚空间 $C_0=\left((\frac{1}{2},1]\times\{0\}\right)\cup(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}L_n)$ 也不是局部连通的．

证 C 的道路连通性是明显的．

现考虑 C 的开子空间 $G=B_{E^2}\left(\langle 1,0\rangle,\frac{1}{2}\right)\cap C$，其中 $B_{E^2}\left(\langle 1,0\rangle,\frac{1}{2}\right)$ 是 E^2 中的开球，易见 $(\frac{1}{2},1]\times\{0\}$ 是 G 的连通分支，但它不是 C 的开集，所以 C 不是局部连通的． □

2.3.5 设 $A=\{\langle x,y\rangle\in E^2\,|\,x,y$ 中至少有一个是有理数$\}$，证明：A 作为 E^2 的子空间是局部连通的．

证 任取 $\langle x,y\rangle\in A$，不妨假设 $y\in\mathbf{Q}$. $\forall\ U\in\mathscr{N}_A(\langle x,y\rangle)$，$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $B=B_{E^2}(\langle x,y\rangle,\varepsilon)\cap A\subset U$. 我们证明 B 连通．

设 $f:B\to\{0,1\}\subset E^1$ 连续，只需证 f 是常值的．$\forall\ \langle u,v\rangle\in B$，若 $u\in\mathbf{Q}$，由于 $L_1=B\cap(\{u\}\times\mathbf{R})$ 连通，且 $L_2=B\cap\{\mathbf{R}\times\{y\})$ 也连通，且 $\langle u,y\rangle\in L_1\cap L_2$. 所以 $f|_{L_1\cup L_2}$ 是常值的．从而

$$f(u,v)=f(x,y).$$

若 $u\notin\mathbf{Q}$ 则必有 $v\in\mathbf{Q}$，由于 $L_3=(\mathbf{R}\times\{v\})\cap B$ 连通，又 $\exists\ t\in\mathbf{Q}$ s.t. $\langle t,v\rangle\in L_3\subset B$. 由上一段可知

$$f(t,v)=f(x,y)$$

又 $f|_{L_3}$ 也是常值的，故

$$f(u,v)=f(t,v)=f(x,y).$$

总之，$f:B\to\{0,1\}\subset E^1$ 是常值的，所以 B 连通，从而 A 局部连通． □

2.3.6 证明 E^1 的每个非空开集总可表示成可数个互不相交的开区间的并．

证 设 G 为 E^1 的非空开集，$\forall\ x\in G$，存在 G 的连通分支 C_x 使 $x\in C_x$. 于是 $G=\bigcup\limits_{x\in G}C_x$. 由于 E^1 是局部（道路）连通的，所以每个 C_x 都是 E^1 的开集，又 C_x 是连通的，故为区间，从而必为开区间．由于任意两个不同的连通分支都不相交，所以 G 可表示成一些互不相交的开区间的并．而每个开区间，总可用其中一个有理数作代表，从而 G 可表示成可数多个互不相交的开区间的并． □

（二） 常见错误分析

2.3.7 证明 X 的局部连通（局部道路连通）性能被连续的开映射保持．

分析下述证明有何错误：

以局部连通性为例．

设 $f: Z \to Y$ 为连续满射且是开映射，X 是局部连通的．

$\forall\ y \in Y, \exists\ x \in X$ s.t. $y = f(x)$. 于是在 X 中，存在包含 x 的连通开集 G，由于 f 是连续的开映射，于是 $f(G)$ 是 Y 中包含 $y = f(x)$ 的连通开集．所以 Y 是局部连通的．

分析　对于一个空间，如果是局部连通的，那么对空间中任意一点总有包含它的连通开集，但反之未必．例如闭扫帚空间(B2.3.4)C 是道路连通的，当然也是连通的，因此 C 的每一点都有包含它的连通开集即 C 本身，但已知 C 不是局部连通的．

因此"$\forall\ x$ 以及 $U \in \mathscr{N}(x)$ 存在连通开集 G 使 $x \in G \subset U$"这个条件，不能简化为"$\forall\ x$ 总有包含它的连通开集"．

所以我们对一个概念的理解，必须完整地理解界定这一概念的具体条件，不能随意地简化更改．如果把界定某一概念的条件"削弱"了，那么就相当于将原概念的内涵缩小了，而外延则扩大了．上面就是一例．如果把条件"加强"了，则内涵就扩大，而外延缩小了．所以我们必须准确地掌握界定概念的有关条件．

正确的证明应是：

$\forall\ y \in Y$ 以及 $V \in \mathscr{N}_Y(y)$ $\exists\ x \in X$ 以及 $U \in \mathscr{N}_X(x)$ s.t. $y = f(x)$ 且 $f(U) \subset V$. 由 X 的局部连通性，$\exists\ G \in \tau_X$ s.t. G 连通且 $x \in G \subset U$. 则

$$y = f(x) \in f(G) \subset f(U) \subset V.$$

由于 f 连续，故 $f(G)$ 连通，由于 f 是开映射，故 $f(G) \in \tau_Y$，从而证明了 Y 是局部连通的．

对于局部道路连通性完全类似．　□

C　练习题

2.3.1　证明 X 是局部连通(局部道路连通)的$\Leftrightarrow$存在 τ_X 的一个基，它的每个成员都是连通(道路连通)的．

2.3.2　证明 $\boldsymbol{E}^2$ 的子空间

$$B = \{\langle x,y\rangle \in \boldsymbol{E}^2 \mid x = 0 \text{ 或 } y \in \mathbf{Q}\}$$

不是局部连通的．

2.3.3　证明 X 局部道路连通$\Leftrightarrow\forall\ x \in X$ 及 $U \in \mathscr{N}(x) \exists\ V \in \mathscr{N}(x)$ s.t V 道路连通且 $V \subset U$.

2.3.4　证明梳子空间 C 与缺边梳子空间 D(B2.2.4)都不是局部连通的．

2.3.5　设 $\boldsymbol{E}^2$ 的子空间 $Y = \{\langle 0, \frac{1}{n}\rangle \mid n \in \mathbf{N}\} \cup D$，其中 D 为缺边梳子空间，证明 Y 在原点处是局部连通但非局部道路连通的．

2.3.6　证明闭拓扑正弦曲线 $X = A \cup B$(B2.2.5)不是局部连通的；$S = B \cup \{\langle 0,0\rangle\}$ 叫做拓扑正弦曲线，它是连通的，但不是道路连通，也不是局部连通的，$T = X \cup ([0,1] \times \{0\})$ 叫做扩张的拓扑正弦曲线，它是道路连通的，但不是局部连通的．

2.3.7 设 $f: X\to Y$ 为单射，且为连续的开映射，又 Y 的任一连通子集的原像是 X 的连通子集．证明：如果 Y 局部连通（局部道路连通），那么 X 也是局部连通（局部道路连通）．

§2.4 超连通性与反例

本节再向读者介绍两种分别比连通性与道路连通性更强的性质，即所谓超连通性，再给出若干反例，并将本章给出的诸种连通性质作一小结，给出它们相互关系的反例表．

A 基本概念与定理

2.4.1 定义 如果 X 中任意两个非空开集都相交，则称 X 是开式超连通的；如果 X 的任意两个非空闭集都相交，则称 X 是闭式超连通的．

2.4.2 定理 (1) X 为开式超连通的$\Leftrightarrow X$ 的每个非空开集都是稠密的；

(2) X 是闭式超连通的$\Leftrightarrow \forall\, x,y\in X$ 且 $x\neq y$，$\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}\neq\varnothing$．

证 由定义直接可得． □

2.4.3 定理 (1) X 是闭式超连通的$\Rightarrow X$ 是道路连通的；

(2) X 是开式超连通的$\Rightarrow X$ 既是连通的又是局部连通的．

证 (1) $\forall\, x,y\in X$，不妨假定 $x\neq y$，因 X 是闭式超连通的，故$\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}\neq\varnothing$．取 $z\in\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}$，令 $f:[0,1]\to X$ 为

$$f(t)=\begin{cases} x & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ z & t=\dfrac{1}{2},\\ y & \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1.\end{cases}$$

我们证明 f 连续．事实上，设 F 为 X 的任一闭集，若 x,y 中至少有一点属于 F，则必有 $z\in F$. 于是 $f^{-1}(F)$或为$[0,\frac{1}{2}]$，或为$[\frac{1}{2},1]$，或为$[0,1]$，总之是闭集．

若 x,y 都不属于 F，则 $f^{-1}(F)$或为$\{\frac{1}{2}\}$，或为$\varnothing$，也是$[0,1]$的闭集．

所以 f 连续，从而就是 X 中连接 x,y 的道路．

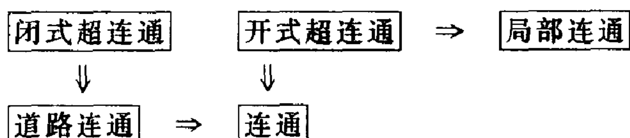
(2) X 的连通性是显然的，又若 G 是 X 的任一开子空间，则 G 的任意两个非空开集也是 X 的开集，故必相交．所以 G 是连通的，也就是 X 为局部连通的． □

2.4.4 定理 若 X 是开式超连通的，则任一连续映射 $f: X\to E^1$ 都是常值的．

证 若 f 至少有两个值 $a\neq b$，则

$$f^{-1}(-\infty,\frac{a+b}{2})\text{ 与 }f^{-1}(\frac{a+b}{2},+\infty)$$

是 X 的两个不相交的非空开集，与 X 的开式超连通性矛盾．所以 f 是常值的． □



B 反例

2.4.1 至少有三个不同点的特殊点拓扑空间 X(p 为特殊点)是开式超连通的,道路连通的,局部道路连通的,但非闭式超连通的.

证 X 显然是开式超连通的.

$\forall q\in X, q\neq p$,令 $f:[0,1]\to X$ 为

$$f(x)=\begin{cases} p & x\in[0,\frac{1}{2}),\\ q & x\in[\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

则 X 的任一开集的原像或为 $\varnothing$,或 $[0,\frac{1}{2})$,或为 $[0,1]$,总是 $[0,1]$ 的开集. 所以 f 是连接 p,q 的道路,从而 X 道路连通.

由于 X 的任一开子空间仍为特殊点拓扑空间,从而 X 是局部道路连通的.

由于 X 除 p 外至少还有两个点 $x\neq y$,则 $\{x\}$ 与 $\{y\}$ 即为不相交的闭集. 所以 X 非闭式超连通的. □

2.4.2 至少有三个不同点的排外点拓扑空间 X(排斥 p 点)是闭式超连通的,局部道路连通的,从而也是道路连通与连通的,但非开式超连通的.

证 X 显然是闭式超连通的,从而是道路连通,连通的,而且

$$\mathscr{B}=\{\{x\}\mid x\neq p, x\in X\}\cup\{X\}$$

是 X 的一个由道路连通的开集组成的基,所以 X 是局部道路连通的.

因除 p 外,X 至少有两个不同的点 x,y,则 $\{x\}$ 与 $\{y\}$ 即为不相交的开集,故 X 不是开式超连通的. □

2.4.3 设 $B_n=\{2n-1,2n\}, n\in\mathbf{N}$,则以 $\mathscr{B}=\{B_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 为基生成 $\mathbf{N}$ 的拓扑 τ,称此空间 $\langle\mathbf{N},\tau\rangle$ 为奇偶拓扑空间,它是局部道路连通的但非连通,从而也非开式超连通,非闭式超连通的.

证 因为每个 B_n 作为子空间是平凡的,故任一映射 $f:[0,1]\to B_n$ 都是连续的. 所以 B_n 是道路连通的,从而 $\langle\mathbf{N},\tau\rangle$ 是局部道路连通的. 但每个 B_n 都是既开又闭的非空真子集,所以 $\langle\mathbf{N},\tau\rangle$ 不是连通的. □

2.4.4 区间套拓扑空间:设 $X=(0,1)$,$\forall n\in\mathbf{N}$ 令 $G_n=(0,1-\frac{1}{n})$,$\tau=\{G_n\mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{\varnothing,X\}$. $\langle X,\tau\rangle$ 称为区间套拓扑空间. 显然它既是开式超连通也是闭式超连通的. 从而也是道路连通的,连通与局部连通的. □

2.4.5 整数扫帚空间：X 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上具有极坐标 $\langle n,\theta\rangle$ 的点的集合，其中 $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，$\theta\in\{\frac{1}{n}|n\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$. X 的拓扑 τ 如下定义：令

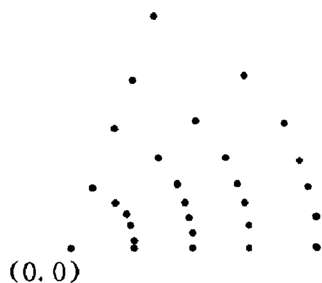


图 2.4.1

$$M=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbf{N}\}\cup\{0\},$$

$$U_i=\{i,i+1,i+2,\cdots\cdots\}\quad(i\in\mathbf{N}\cup\{0\})$$

$$V_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)\cap M,\varepsilon>0,$$

$$\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)=\{X\},$$

$$\mathscr{B}(\langle n,\theta\rangle)=\{U_i\times\{\theta\}\,|\,i=0,1,\cdots,n\},\quad(\theta\neq 0),$$

$$\mathscr{B}(\langle n,0\rangle)=\{U_i\times V_\varepsilon\,|\,i=0,1,\cdots,n;\varepsilon>0\},\quad(n\neq 0).$$

以 $\mathscr{B}(\langle n,\varepsilon\rangle)$ 为相应点 $\langle n,\theta\rangle$ 的邻域基诱导拓扑 τ，称 $\langle X,\tau\rangle$ 为整数扫帚空间．$\langle X,\tau\rangle$ 是闭式超连通的，但非局部连通的．

证 易见 X 的每个非空闭集都包含原点，所以 X 是闭式超连通的．

因为 $G=\mathbf{N}\times\left([0,\frac{1}{n})\cap M\right)$ 是 X 的开子空间，$\mathbf{N}\times\{0\}$ 是 G 的连通分支，但不是 X 的开集，所以 X 不是局部连通的．(注意：本例中各笛卡儿积中的每个元素 $\langle n,\theta\rangle$ 都表示 $\mathbf{R}^2$ 中以 $\langle n,\theta\rangle$ 为极坐标的点)． □

2.4.6 交叠区间拓扑空间：$X=[-1,1]$，以 $\mathscr{S}=\{[-1,b)\,|\,b>0\}\cup\{(a,1]\,|\,a<0\}$ 为拓扑子基生成拓扑 τ，$\langle X,\tau\rangle$ 称为交叠区间拓扑空间．$\langle X,\tau\rangle$ 是开式超连通的，从而也是连通的，局部连通的，但非闭式超连通的．

证 由于每个非空开集都包含原点，所以 $\langle X,\tau\rangle$ 是开式超连通的．而 $[-1,\frac{1}{2}]$ 与 $[\frac{1}{2},1]$ 是两个不相交的闭集，所以 $\langle X,\tau\rangle$ 不是闭式超连通的． □

2.4.7 除子拓扑空间：$X=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x\geqslant 2\}$，令

$$U_n=\{x\in X\,|\,x\text{ 整除 }n\},n\geqslant 2.$$

以 $\mathscr{B}=\{U_n\,|\,n\geqslant 2\}$ 为基生成拓扑 τ. $\langle X,\tau\rangle$ 叫做除子拓扑空间，它是闭式超连通的，局部道路连通的，但非开式超连通的．

证 设 F_1,F_2 为 X 的任意两个非空闭集，任取 $x_1\in F_1$，$x_2\in F_2$，因 $\forall\,U\in\mathscr{N}(x_1\cdot x_2)$ $\exists\,U_n$ s.t. $x_1\cdot x_2\in U_n\subset U$，则 $x_1\cdot x_2$ 整除 n，故 x_1 整除 n，x_2 也整除 n，即 $\{x_1,x_2\}\subset U_n\subset U$. 于是 $U\cap F_1\neq\varnothing$，且 $U\cap F_2\neq\varnothing$，所以 $x_1\cdot x_2\in\overline{F}_1\cap\overline{F}_2=F_1\cap F_2$. 即 $F_1\cap F_2\neq\varnothing$. 这就表明 $\langle X,\tau\rangle$ 是闭式超连通的．

每个 U_n 作为子空间，则在 U_n 中包含 n 的开集只有 U_n 本身，所以对 U_n 中的任一闭集 F 都有 $n\in\mathrm{Cl}_{U_n}F=F$. 于是 U_n 作为子空间是闭式超连通的，所以是道路连通的，从而 X 是局部

道路连通的．

而 $U_2 \cap U_3 = \{2\} \cap \{3\} = \varnothing$，所以 X 不是开式超连通的． □

2.4.8 字典序拓扑空间：$X=[0,1]\times[0,1]$ 取字典序拓扑 τ. 则 $\langle X,\tau\rangle$ 是连通的，局部连通的，但非道路连通，也非开式超连通．

为了证明这一结果，我们先证下述命题：

设 $\langle X,\leqslant\rangle$ 为全序集，如果 X 的每个有下界的子集必有下确界，有上界的子集必有上确界则称 X 是序完备的，对一个序完备的全序集 $\langle X,\leqslant\rangle$，如果 $\forall\ x,y\in X$，当 $x<y$ 时必存在 $z\in X$ 使 $x<z<y$. 则称 $\langle X,\leqslant\rangle$ 是线性连续统．

命题 (1) 如果 $\langle X,\leqslant\rangle$ 是线性连续统，取序拓扑 τ，则 $\langle X,\tau\rangle$ 是连通的．

(2) 如果 $\langle S,\tau_S\rangle$ 是连通的拓扑空间，$\langle X,\tau\rangle$ 是一个序拓扑空间，$f: S\to X$ 连续，$\forall\ a,b\in S$，若有 $f(a)<f(b)$，则当 $x\in X$ 且 $f(a)<x<f(b)$ 时，必存在一点 $c\in S$ 使 $f(c)=x$（这是介值定理的一种推广）.

证 (1) 设 A,B 为 X 的两个不相交的非空开集，我们将证明 $X\neq A\cup B$.

选取 $a\in A, b\in B$. 不妨假定 $a<b$. 我们证 $[a,b]$ 中有一点既不属于 A，又不属于 B.

考虑集合 $A_0=A\cap[a,b]$，$B_0=B\cap[a,b]$. A_0,B_0 在子空间 $[a,b]$ 中是开的．令

$$c = \sup A_0$$

(i) 假定 $c\in B_0$，则 $c\neq a$. 于是要么 $c=b$，要么 $a<c<b$. 无论怎样，由 B_0 开于 $[a,b]$ 可知存在某个形如 $(d,c]$ 的区间含于 B_0（$[a,b]$ 的子空间拓扑与 $[a,b]$ 本身的序拓扑一致！）. 如果 $c=b$，则 d 就是一个比 c 更小的 A_0 的上界．这与 c 的定义矛盾．故应有 $c<b$. 注意到 $(c,b]\cap A_0=\varnothing$，于是

$$(d,b] = (d,c] \cap (c,b] \subset B_0 \cup (c,b]$$

与 A_0 不相交，从而又有 d 是 A_0 的上界，仍然引起矛盾．这就证明了 $c\notin B_0$.

(ii) 再假定 $c\in A_0$，则 $c\neq b$. 于是要么 $c=a$，要么 $a<c<b$. 因 A_0 开于 $[a,b]$，故必有某个形如 $[c,e)$ 的区间含于 A_0. 由于 X 是线性连续统，我们可以选取一点 $z\in X$ s. t. $c<z<e$. 于是 $z\in A_0$. 这与 c 是 A_0 的上界矛盾．所以 $c\notin A_0$.

由(i)，(ii)知 $c\notin A_0\cup B_0=(A\cup B)\cap[a,b]$. 但 $c\in[a,b]$（因为 $A_0\subset[a,b]$，$c=\sup A_0$），所以 $c\notin A\cup B$. 从而 X 不能分解成两个非空的不相交的开集之并，即 X 是连通的．

(2) 如果 $\forall\ t\in S, f(t)\neq x$，则

$$A = f(S) \cap (\leftarrow,x),\ B = f(S) \cap (x,\rightarrow)$$

是 $f(S)$ 的一个分解，而 $f(S)$ 连通，这是一个矛盾．所以必 $\exists\ c\in S$，使 $f(c)=x$.

现在我们可以回头来证明 B2.4.8.

我们先证 X 是序完备的，设 $S\subset X$ 且 $S\neq\varnothing$. 令

$$A = \{x \in [0,1] \mid \exists\ y \in [0,1]\ \text{s. t.}\ \langle x,y\rangle \in S\},$$

则 A 有下确界，记为 $a=\inf A$.

若 $a\notin A$，则令 $b=1$；

若 $a\in A$，则

$$B = \{y \in [0,1] \mid \langle a,y\rangle \in S\}$$

有下确界，就取 $b=\inf B$.

我们证明$\langle a,b\rangle=\inf S$.

$\forall\ \langle x,y\rangle\in S$，由于$x\in A$，必有$a\leqslant x$.

若$a<x$，则有$\langle a,b\rangle<\langle x,y\rangle$；

若$a=x$，便有$y\in B$，于是$b\leqslant y$，从而$\langle a,b\rangle\leqslant\langle x,y\rangle$.

总之，$\langle a,b\rangle$是S的下界.

再设$\langle u,v\rangle$也是S的下界，且$\langle a,b\rangle<\langle u,v\rangle$，则$(a<u)$或$(a=u$且$b<v)$.

(i) 若$a<u$，则由于$a=\inf A$可知$\exists\ x\in A$ s.t. $x<u$，于是$\exists\ y\in[0,1]$ s.t. $\langle x,y\rangle\in S$且$\langle x,y\rangle<\langle u,v\rangle$. 这与$\langle u,v\rangle$是$S$的下界矛盾.

(ii) 若$a=u$且$b<v$. 当$a\notin A$时，必有$v\leqslant 1=b$. 引起矛盾. 所以$a\in A$. 则由$v>b=\inf B$知$\exists\ y\in B$ s.t. $y<v$. 从而$\langle a,y\rangle\in S$且$\langle a,y\rangle<\langle a,v\rangle=\langle u,v\rangle$又与$\langle u,v\rangle$是$S$的下界矛盾. 这就证明了对$S$的任一下界$\langle u,v\rangle$必有$\langle u,v\rangle\leqslant\langle a,b\rangle$. 故

$$\langle a,b\rangle=\inf S.$$

类似地可证S有上确界(其实X的有下界的非空子集有下确界$\Leftrightarrow X$有上界的非空子集有上确界). 至此证明了X是序完备的.

至于对X中任意两点$p<q$必存在$r\in X$ s.t. $p<r<q$成立是容易验证的. 所以X是线性连续统. 故由上述命题(1)知X是连通的.

由于X的任一非退化的区间也是线性连续统(这是不难验证的)，且对于区间，子空间拓扑与序拓扑一致，所以作为子空间也连通. 因此X的拓扑基的成员都是连通的，所以X是局部连通的.

再证X不是道路连通的.

设$f:[0,1]\to X$为连接$\langle 0,0\rangle$与$\langle 1,1\rangle$的道路，则由介值定理(命题(2))知，$f([0,1])=X$，令$G_x=\{x\}\times(0,1)$，则

$$\mathscr{G}=\{G_x\mid x\in[0,1)\}$$

是X的互不相交的开集的不可数族，于是

$$\{f^{-1}(G_x)\mid x\in[0,1)\}$$

是$[0,1]$的互不相交的开集的不可数族，这是不可能的(见B1.3.8). 所以X不是道路连通的. 如上述，当$x_1\neq x_2$时$G_{x_1}\cap G_{x_2}=\varnothing$，所以$X$是非开式超连通的. □

现归纳总结出如下反例表：

表2.4.1

18 局部连通

局部道路连通

1
2 17
4
5

开式超连通
3 8
6 16 7

表2.4.2

连通

道路连通 10 9 11
闭式超连通 15 12 13
14
4 1
开式超连通 6 3 8 7 18
16

2 5 局部连通

其中

1. E^1.
2. 多于一点的离散拓扑空间.
3. 多于两点的特殊点拓扑空间(B2.4.1).
4. 多于两点的排外点拓扑空间(B2.4.2.).
5. 奇偶拓扑空间(B2.4.3).
6. 区间套拓扑空间(B2.4.4).
7. 可数集构成的有限补拓扑空间(B2.2.6).
8. 不可数集构成的有限补拓扑空间(B2.2.7).
9. 拓扑正弦曲线(C2.3.6)或闭拓扑正弦曲线(B2.2.5，C2.3.6).
10. 扩张的拓扑正弦曲线(C2.3.6).
11. 缺边梳子空间 D(B2.2.4，C2.3.4).
12. 梳子空间 C(B2.2.4，C2.3.4).
13. 扫帚空间(C2.2.2，B2.3.4.连通性见 C2.1.8).
14. 闭扫帚空间(C2.1.8，C2.2.2，B2.3.4).
15. 整数扫帚空间(B2.4.5).
16. 交叠区间空间(B2.4.6).
17. 除子空间(B2.4.7).
18. 字典序拓扑空间$[0,1]\times[0,1]$(B2.4.8).

第三章　网与滤子的收敛论理

§3.1　网与滤子及其收敛性

A　内容提要

3.1.1 定义　X 为非空集，D 为有向集（即 D 上有一个自反的传递的关系 $\prec$ 且 $\forall a,b\in D\ \exists c\in D$ s.t. $a\prec c$ 且 $b\prec c$），称 $\xi: D\to X$ 为 X 的网．记 $\xi(d)=x_d$，$\xi=\langle x_d\rangle_{d\in D}$．

若 $\eta=\langle y_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}: \Delta\to X$ 也是 X 的网，且存在映射 $k: \Delta\to D$ 满足：

[SN.1] 保向性：$\delta_1\prec\delta_2\Rightarrow k(\delta_1)\prec k(\delta_2)$．

[SN.2] 共尾性：$\forall d_0\in D\ \exists\ \delta_0\in\Delta$ s.t. $d_0\prec k(\delta_0)$，且 $\eta=\xi\circ k$，则称 η 为 ξ 的子网．

3.1.2 定义　$\xi=\langle x_d\rangle_{d\in D}$ 为 X 的一个网，$A\subset X$．如果 $\xi(D)\subset A$，说 ξ 在 A 中；如果 $\forall d_0\in D\ \exists\ d\in D$ s.t. $d\succ d_0$ 且 $x_d\in A$，就说 ξ 常在 A；如果 $\exists\ d_0\in D$ s.t. $\forall\ d\succ d_0$ 有 $x_d\in A$，就说 ξ 终于 A．

如果 X 是拓扑空间，ξ 常在 x 的每个邻域就说 x 为 ξ 的接触点，ξ 的全体接触点记作 $\mathrm{Adh}\xi$．如果 ξ 终于 x 的每个邻域，则说 x 是 ξ 的极限点，或说 ξ 收敛于 x，ξ 的全体极限点记作 $\mathrm{Lim}\xi$，当 $\mathrm{Lim}\xi\neq\varnothing$ 时，说 ξ 是收敛的．

3.1.3 定理　设 $\xi: D\to X$ 为网，$\eta: \Delta\to X$ 为 ξ 的子网，则

$$\mathrm{Adh}\eta\subset\mathrm{Adh}\xi,\qquad \mathrm{Lim}\xi\subset\mathrm{Lim}\eta.$$

3.1.4 定义　设 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(X)$，$\mathscr{F}\neq\varnothing$．如果 $\mathscr{F}$ 满足

[F.1]　$\varnothing\notin\mathscr{F}$．

[F.2]　$F_1\in\mathscr{F}$ 且 $F_1\subset F\Rightarrow F\in\mathscr{F}$．

[F.3]　$F_1,F_2\in\mathscr{F}\Rightarrow F_1\cap F_2\in\mathscr{F}$．

则说 $\mathscr{F}$ 是 X 的滤子．

如果 X 为拓扑空间，则称 $\mathrm{Adh}\mathscr{F}\xlongequal{\text{def}}\bigcap_{F\in\mathscr{F}}\overline{F}$ 为 $\mathscr{F}$ 的接触集，$x\in\mathrm{Adh}\mathscr{F}$ 就叫 x 为 $\mathscr{F}$ 的接触点，如果 $\mathscr{N}(x)\subset\mathscr{F}$，就说 x 是 $\mathscr{F}$ 的极限点，或说 $\mathscr{F}$ 收敛于 x．并记 $\mathrm{Lim}\mathscr{F}=\{x\in X\mid\mathscr{N}(x)\subset\mathscr{F}\}$．当 $\mathrm{Lim}\mathscr{F}\neq\varnothing$ 时，说 $\mathscr{F}$ 是收敛的．

3.1.5 例　如果 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$，其中任意有限个（至少一个，以后总这样理解）成员之交非空，则说 $\mathscr{A}$ 具有有限交性质．此时可令

$$\mathscr{B} = \{B \subset X \mid \exists\ n \in \mathbf{N} \text{ 以及 } A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A} \text{ s.t.} B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i\},$$

$$\mathscr{F} = \{F \subset X \mid \exists\ B \in \mathscr{B} \text{ s.t. } B \subset F\},$$

则 $\mathscr{F}$ 为 X 的滤子，叫做由 $\mathscr{A}$ 生成的滤子．

任一拓扑空间 X 中一点 x 的邻域系 $\mathscr{U}(x)$ 是 X 的滤子，叫邻域滤子．邻域滤子 $\mathscr{U}(x)$ 显然收敛于 x.

3.1.6 定义　X 的一切滤子组成的族可用关系 $\subset$ 作偏序，在这个偏序下的极大元叫极大滤子或超滤子．

3.1.7 定理　对于 X 的每个滤子 $\mathscr{F}$ 总存在极大滤子 $\mathscr{F}^*$ 使 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^*$.

3.1.8 定理　拓扑空间 X 中一点 x 为滤子 $\mathscr{F}$ 的接触点 $\Leftrightarrow \exists$ 滤子 $\mathscr{G}$ s.t. $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ 且 $\mathscr{G}$ 收敛于 x.

若 $\mathscr{F}$ 为 X 的超滤子，则 $\mathrm{Adh}\mathscr{F} = \mathrm{Lim}\mathscr{F}$.

B　例题

(一)

网及其收敛概念是序列及其收敛概念的自然的推广．要构造一个网，关键在于构造有向集，并常常借助于数的大小，集合的包含关系给出定向．滤子概念介于点的邻域系和集合的拓扑概念之间．滤子和拓扑一样对有限交和任意并是封闭的，也含全空间，但不含空集．拓扑就必须含有空集．邻域系是滤子，而滤子不必是邻域系，当滤子含有某一点的邻域系时，就是收敛的．滤子的构造非常方便，只要有一个具有有限交性质的子集族就能生成一个滤子(A3.1.5)，解题时，常常这样做，应予充分注意．

3.1.1　设 $\xi: \Delta \to X$ 是 X 的网，$\Delta \subset D$.

(1) 证明：如果 Δ 与 D 共尾(即 $\forall\ d \in D\ \exists\ \delta \in \Delta$ s.t. $d < \delta$)，那么 $\eta = \xi|_\Delta: \Delta \to X$ 是 ξ 的子网．

(2) 若删去 Δ 与 D 共尾的条件，则 $\eta = \xi|_\Delta$ 是否仍然是 ξ 的子网？

解　(1)　首先 D 上的定向 $<$ 在 Δ 上的限制仍是自反的，传递的．又 $\forall\ \delta_1, \delta_2 \in \Delta \subset D$，$\exists\ d \in D$ s.t. $\delta_1 < d$，$\delta_2 < d$. 由于 Δ 与 D 共尾，故又 $\exists\ \delta \in \Delta$ s.t. $d < \delta$，于是 $\delta_1 < \delta, \delta_2 < \delta$. 所以 $<$ 也是 Δ 上的定向；

现设 $i_\Delta: \Delta \to D$ 为包含映射，则 $\eta = \xi \cdot i_\Delta$. 又 i_Δ 显然是保向的，并由 Δ 与 D 共尾可知 i_Δ 也满足共尾性条件[SN.2.]. 所以 η 是 ξ 的子网．

(2)　如不要求 Δ 与 D 共尾，则 $\xi|_\Delta$ 未必是子网．

首先，有向集 D 的任意子集 Δ 相对于 D 的定向未必构成有向子集．例如，令

$$B_i = \{\frac{1}{i}, \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+2}, \cdots\},\ i \in \mathbf{N}.$$

$$\mathscr{B} = \{(-\varepsilon, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}.$$

$$D = \mathscr{B} \cup \{B_i \mid i \in \mathbf{N}\}.$$

$\forall\ U, V \in D$ 定义

$$U \prec V \Leftrightarrow U \supset V.$$

则易见"$\prec$"是 D 上的定向．若取

$$\Delta = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\} \cup \{(\quad \varepsilon, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \text{ 且 } \varepsilon \in \mathbf{Q}\},$$

其中 n 是某个固定的自然数．

则对于 Δ 中的元 B_n 以及 $(-\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2})$ 就不存在 $U \in \Delta$ 使 $B_n \prec U$ 与 $(-\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2}) \prec U$ 都成立．既然 Δ 已不再是有向集了，$\xi|_\Delta$ 也就不是网了．

其次，即使 Δ 是有向子集，$\xi|_\Delta$ 也未必是子网．如果 $\xi: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$，$n \mapsto \frac{1}{n}$ 是 $\mathbf{R}$ 的网．取 $\Delta = \{1, 2, \cdots, n\}$，其中 n 是某个固定的自然数，则 Δ 是 $\mathbf{N}$ 的有向子集．$\xi|_\Delta$ 也是 $\mathbf{R}$ 的一个网．尽管如此，它也不是 ξ 的子网，因为要使 $\xi|_\Delta = \xi \cdot k$，只能取 $k = i_\Delta$，而 i_Δ 显然不满足共尾性条件[SN. 2]. □

注　这个例子提醒我们，子网的概念不能混同于一个网在定义集的子集(即使是有向子集!)上的限制．

3.1.2　设 A 为空间 X 的子空间，$\xi: D \to A$ 是 A 的网．证明

(1) $\mathrm{Lim}_A \xi = A \cap \mathrm{Lim}_X (i_A \circ \xi)$，其中 $i_A: A \to X$ 为包含映射．

(2) $\mathrm{Adh}_A \xi = A \cap \mathrm{Adh}_X (i_A \circ \xi)$.

记号 Lim_A, Lim_X 分别表示在 A 中与 X 中取极限，Adh_A, Adh_X 类似．

证　(1)　设 $x \in \mathrm{Lim}_A \xi$，则 $x \in A$ 且 $\forall\, U \in \mathscr{N}_X(x)$，因 $U \cap A \in \mathscr{N}_A(x)$，故 $\exists\, d_0 \in D$ s.t. $\forall\, d > d_0$，$i_A \circ \xi(d) = \xi(d) \in A \cap U \subset U$. 所以 $x \in \mathrm{Lim}_X (i_A \circ \xi)$.

反之，设 $x \in A \cap \mathrm{Lim}_X (i_A \circ \xi)$，因 $x \in A$，故可考虑 $\forall\, U \cap A \in \mathscr{N}_A(x)$，其中 $U \in \mathscr{N}_X(x)$，$\exists\, d_0 \in D$ s.t. $\forall\, d > d_0$，$\xi(d) = i_A \circ \xi(d) \in U$. 因 $\xi(d) \in A$，故 $\xi(d) \in U \cap A$，所以 $x \in \mathrm{Lim}_A \xi$.

(2)　类似 □

注　若记 $\xi = \langle x_d \rangle_{d \in D}$，则也有 $i_A \circ \xi = \langle x_d \rangle_{d \in D}$，于是式(1)可解释为 $\langle x_d \rangle_{d \in D}$ 在子空间 A 中的极限也是它在 X 中的极限，反过来，它在 X 中的极限如果属于 A，则就是它在子空间 A 中的极限，对于(2)可作类似的解释．

3.1.3　设 C 为 X 的一个指定的非空闭集，试构造一个网 ξ 使 $\mathrm{Adh}\xi = C$.

分析　首先我们试图借助于自然数序列构造有向集 D. 要求 $\mathrm{Adh}\xi = C$，就要求 $\forall\, x \in C$，ξ 常在 x 的每个邻域 U. 不管怎样，x 本身总是属于它的每个邻域的．因此就设想，让 x 贴到每个自然数上面，其顺序由自然数的大小而定，而它在 ξ 之下的像就还 x 的本来面目，这样的 ξ 总是常在 x 的每个邻域内．根据这一设想正式证明如下：

证　令 $D = C \times \mathbf{N}$，$d_1 = \langle x_1, n_1 \rangle \prec \langle x_2, n_2 \rangle = d_2 \Leftrightarrow n_1 \leqslant n_2$. 易见 $\prec$ 是 D 的一个定向．再令

$$\xi: D \to X,\ \langle x, n \rangle \mapsto x.$$

即得网 ξ. 容易验证 $\mathrm{Adh}\xi = C$. □

3.1.4　设 $X = X_1 \times X_2$ 为积空间，证明 X 的网 $\xi = \langle x_d \rangle_{d \in D}$ 收敛于点 $x = \langle x^1, x^2 \rangle \Leftrightarrow X_i$ 的网 $\langle x_d^i \rangle_{d \in D}$ 收敛于 x^i ($\forall\, i = 1, 2$). 其中 $x_d = \langle x_d^1, x_d^2 \rangle$.

证　"$\Rightarrow$"　$\forall\, U_i \in \mathscr{N}_{X_i}(x^i)$，$i = 1, 2$. 由于 $U_1 \times U_2 \in \mathscr{N}_X(x)$，故 $\exists\, d_0 \in D$ s.t. $\forall\, d > d_0$，$x_d \in U_1 \times U_2$. 即 $x_d^1 \in U_1$，$x_d^2 \in U_2$，所以 $\langle x_d^i \rangle_{d \in D}$ 收敛于 x^i，$i = 1, 2$.

"$\Leftarrow$"　$\forall\, U \in \mathscr{N}_X(x_0)$，$\exists\, U_i \in \mathscr{N}_{X_i}(x^i)$，$i = 1, 2$ s.t. $U_1 \times U_2 \subset U$. 由假设 $\forall\, i = 1, 2$ $\exists\, d_i$

$\in D$ s.t. $\forall d > d_i\ x_d^i \in U_i$. 对于 d_1, d_2 又 $\exists\ d_0 \in D$ s.t. $d_1 < d_0, d_2 < d_0$，故当 $d > d_0$ 时

$$x_d = \langle x_d^1, x_d^2 \rangle \in U_1 \times U_2 \subset U.$$

所以 $\langle x_d \rangle_{d\in D}$ 收敛于 x. □

3.1.5 试用滤子的收敛性刻划函数 $f: A \to E^1$（其中 A 为 E^1 的区间或 E^n 的区域）的极限；用网的收敛性刻划函数 $f: [a,b] \to E^1$ 的黎曼可积性.

解 (1) 设 $a \in A'$，则 $\forall\ \delta > 0, B(a,\delta) \cap (A - \{a\}) \neq \varnothing$. 于是 $f((B(a,\delta) \cap (A - \{a\}) \neq \varnothing$. 且对于 $\delta_1 \leqslant \delta_2$，

$$\begin{aligned} &f(B(a,\delta_1) \cap (A - \{a\}) \\ &= f(B(a,\delta_1) \cap (A - \{a\})) \cap f(B(a,\delta_2) \cap (A - \{a\})). \end{aligned}$$

于是

$$\mathscr{B} = \{f(B(a,\delta) \cap (A - \{a\})) \mid \delta > 0\}$$

具有有限交性质，可生成滤子 $\mathscr{F}$. 可以证明对这个滤子 $\mathscr{F}$ 就有

$$\operatorname*{Lim}_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow l \in \operatorname{Lim}\mathscr{F}.$$

事实上，若 $\operatorname*{Lim}_{x\to a} f(x) = l$. 则 $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ s.t. 当 $x \in A$ 且 $0 < \| x - a \| < \delta$ 时。

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

即 $\forall\ B(l,\varepsilon) \exists\ \delta > 0$ s.t.

$$f(B(a,\delta) \cap (A - \{a\})) \subset (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

所以 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \in \mathscr{F}$，$(\forall\ \varepsilon > 0)$. 而 l 的每个邻域总包含 ε-邻域，由[F.2]知 $\mathscr{N}_{E^1}(l) \subset \mathscr{F}$. 即 $l \in \operatorname{Lim}\mathscr{F}$.

反过来，若 $l \in \operatorname{Lim}\mathscr{F}$. 则 $\forall\ \varepsilon > 0, (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \in \mathscr{F}$，故 $\exists\ \delta > 0$ s.t.

$$f(B(a,\delta) \cap (A - \{a\})) \subset (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

（这是由于 $\mathscr{B}$ 中有限个成员之交仍为 $\mathscr{B}$ 中成员，此 $\mathscr{F}$ 是由 $\mathscr{B}$ 生成的）. 此式正好表示：

当 $x \in A$ 且 $0 < \| x - a \| < \delta$ 时，

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

也就是，$\operatorname*{Lim}_{x\to a} f(x) = l$.

(2) $[a,b]$ 的一个分划 T 是指 $[a,b]$ 的子区间的集合 $T = \{[x_{i-1}, x_i] \mid i = 1,2,\cdots,n\}$，其中 n 是任意的，$\{x_i\}$ 合于条件：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 记

$$\delta(T) = \max\{|x_i - x_{i-1}| \mid i = 1,2,\cdots,n\}.$$

用 c 表示 T 上的选择函数，即 $\forall\ [x_{i-1}, x_i] \in T, c([x_{i-1}, x_i]) \in [x_{i-1}, x_i]$. 现令

$$D = \{\langle T, c \rangle \mid T \text{ 为}[a,b] \text{ 的分划}, c \text{ 为 } T \text{ 上的选择函数}\}.$$

定义：对 D 中任意两个元素

$$\langle T_1, c_1 \rangle \prec \langle T_2, c_2 \rangle \Leftrightarrow \delta(T_1) \geqslant \delta(T_2),$$

容易验证 $\prec$ 是 D 的定向. 令

$$\sigma(T,c) = \sum_{i=1}^{n} f(c([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1}).$$

则 $\sigma: D \to E^1$ 是 E^1 的一个网. 于是可定义：如果 σ 收敛，则称 f 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的. σ 的极限就叫做 f 在 $[a,b]$ 上的定积分. □

注　读者不难验证这里关于定积分的定义与《微积分》中的定义是一致的．事实上，$\sigma(T,c)$就是一个积分和．只不过现在的定义更精确，而过去的定义总是有点别扭．它既不是函数的极限，又不是数列的极限，是一种新的极限，而在微积分中又没有提出这种新的极限理论，试图用函数极限的老概念来描述这种新的极限(积分)概念，就难免产生别扭．现在用网(或滤子)的收敛概念来刻划就顺理成章了．至于这个极限的唯一性问题将由第四章可知，这是由 E^1 的所谓 Hausdorff 性质所决定．在此不必担心．

由这个例子可见网(或滤子)的收敛理论将序列的极限(序列本身就是一个网)，函数极限，黎曼积分那种极限统一起来了．

3.1.6　设 $\mathscr{F}$ 为 X 的滤子．证明：

$$\operatorname{Lim}\mathscr{F}=\bigcap\{\operatorname{Adh}\mathscr{G}\mid\mathscr{G}\text{ 为 }X\text{ 的滤子且 }\mathscr{F}\subset\mathscr{G}\}.$$

证　左端$\subset$右端是显然的．

现设 $x\in$ 右端，但 $x\notin\operatorname{Lim}\mathscr{F}$．则$\exists\ U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $U\notin\mathscr{F}$．故由[F.2]知$\forall\ F\in\mathscr{F}$，$(\mathscr{C}U)\cap F\neq\varnothing$．于是再由[F.3]知 $\mathscr{F}\cup\{\mathscr{C}U\}$具有有限交性质，它可生成一个滤子，记为$\mathscr{G}$，则 $\mathscr{C}U\in\mathscr{G}$ 且 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$.

由于$U\in\mathscr{N}(x)$，故 $x\notin\overline{\mathscr{C}U}$．因此 $x\notin\operatorname{Adh}\mathscr{G}$，这与假设 $x\in$ 右端矛盾．所以 $x\in\operatorname{Lim}\mathscr{F}$．这就完成了证明．　□

（二）　常见错误分析

3.1.7　证明：X 的滤子 $\mathscr{F}$ 是超滤子$\Leftrightarrow$对 X 的子集 A，如果$\forall\ F\in\mathscr{F}$ 有 $A\cap F\neq\varnothing$，那么 $A\in\mathscr{F}$．

分析下述证明有何错误．

(1) 必要性　假定 $\mathscr{F}$ 是超滤子．$A\subset X$ 且$\forall\ F\in\mathscr{F}$ 有 $A\cap F\neq\varnothing$，则

$$\mathscr{G}=\mathscr{F}\cup\{A\cap F\mid F\in\mathscr{F}\}\cup\{A\}$$

显然是 X 的滤子，且 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$，$A\in\mathscr{G}$．由于 $\mathscr{F}$ 是超滤子，故 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$，从而 $A\in\mathscr{F}$．

(2) 充分性　假定“对 X 的子集 A，如果$\forall\ F\in\mathscr{F}$ 有 $A\cap F\neq\varnothing$那么 $A\in\mathscr{F}$”这个条件满足．

现设有 X 的滤子 $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$．则$\forall\ G\in\mathscr{G}$ 有$\forall\ F\in\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$，$G\cap F\neq\varnothing$，所以据假设条件 $G\in\mathscr{F}$，从而 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$．即 $\mathscr{F}$ 是超滤子．

分析　上述第(2)部分是正确的．而第(1)部分，问题就出在“显然”二字上，上面构作的 $\mathscr{G}$ 实际上未必是滤子．因为无法证明如果有某个 $F\in\mathscr{F}$ 以及 $G\subset X$ 使 $G\supset F\cap A$ 时，必有 $G\in\mathscr{G}$．例如 $\mathscr{F}=E^1$ 中原点的邻域滤子 $\mathscr{N}(O)$，$A=\{O\}$，显然$\forall\ F\in\mathscr{F}=\mathscr{N}(O)$，必有 $A\cap F=\{O\}\neq\varnothing$．而且$\{0,1\}\supset A\cap F$，但

$$\{0,1\}\notin\mathscr{F}\cup\{A\cap F\mid F\in\mathscr{F}\}\cup\{A\}=\mathscr{N}(O)\cup\{A\}.$$

所以 $\mathscr{F}\cup\{A\cap F\mid F\in\mathscr{F}\}\cup\{A\}$就不是滤子．

盲目取巧，以为是显然的，而不去认真验证有关条件，这是初学者的一个通病，常常因此导致错误．劝告初学者慎用“显然”二字．仔细一点为好．另外上述错误也反映了错者不善于利用具有有限交性质的子集族能生成滤子这一方便的方法．正确的证明应为：

由假设可知 $\mathscr{F}\cup\{A\}$具有有限交性质，故可生成滤子 $\mathscr{G}$．于是 $\mathscr{F}\cup\{A\}\subset\mathscr{G}$，而 $\mathscr{F}$ 是

超滤子，所以 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$，从而 $A\in\mathscr{G}=\mathscr{F}$． □

3.1.8 证明 X 的滤子 $\mathscr{F}$ 是超滤子$\Leftrightarrow\forall A\subset X, A\in\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{C}A\in\mathscr{F}$ 二者必居其一．

分析下述证明有何错误．

(1) 必要性 设 $\mathscr{F}$ 是超滤子，$A\subset X$，要证 $A\in\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{C}A\in\mathscr{F}$．

$\forall F\in\mathscr{F}$，如果 $A\cap F\neq\varnothing$，

则由上一题的结论知 $A\in\mathscr{F}$，如果 $A\cap F=\varnothing$，则$(\mathscr{C}A)\cap F\neq\varnothing$．故 $\mathscr{C}A\in\mathscr{F}$．

(2) 充分性 假定$\forall A\subset X, A\in\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{C}A\in\mathscr{F}$．又设有 X 的滤子 $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$，且 $G\in\mathscr{G}$，$G\notin\mathscr{F}$．于是 $\mathscr{C}G\in\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$．现在 G 与 $\mathscr{C}G$ 都属于 $\mathscr{G}$，但 $G\cap\mathscr{C}G=\varnothing$与滤子的条件[F.3]，[F.1]矛盾．所以 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$，即 $\mathscr{F}$ 为超滤子．

分析 上述第(2)部分是正确的，第(1)部分则是错误的．是逻辑上的错误．

在 B3.1.7 中“如果$\forall F\in\mathscr{F}$ 有 $A\cap F\neq\varnothing$”这个条件是指一个固定的 A 与每一个 F 都相交，而上述第(1)部分证明中的语句：“$\forall F\in\mathscr{F}$ 如果 $A\cap F\neq\varnothing$，则…，如果 $A\cap F=\varnothing$，则…”是指任意指定一个 F 后(虽然是任意的，但是随后的讨论却是已被指定的)，就会出现 $A\cap F\neq\varnothing$与 $A\cap F=\varnothing$这两种状况．“如果…，如果…”就是对这两种状况分别讨论．事实上没有去对照验证“如果$\forall F\in\mathscr{F}$ 有 $A\cap F\neq\varnothing$”这个条件．从表面上看似乎差不多．但仔细看来，这里有个逻辑上的语序问题．

“如果$\forall F\in\mathscr{F}$ 有 $A\cap F\neq\varnothing$”，这里“如果”在前．

“$\forall F\in\mathscr{F}$ 如果 $A\cap F\neq\varnothing$…”这里“如果”在后，这一前一后意义却完全不同．前者的“如果”是管住“所有的 $F\in\mathscr{F}$”的，后者的“如果”只能管住“从 $\mathscr{F}$ 中任意取定的一个 F”．所以逻辑上的语序是十分重要的，应当引起注意．

正确的证明如下：

目的是要证 $A\in\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{C}A\in\mathscr{F}$．于是我们假定 $A\notin\mathscr{F}$．只要能证明 $\mathscr{C}A\in\mathscr{F}$ 即可．

由 $A\notin\mathscr{F}$ 知$\forall F\in\mathscr{F}$，$F\cap\mathscr{C}A\neq\varnothing$(注，这里 $F\cap\mathscr{C}A\neq\varnothing$是对所有的 F 都成立的！)，于是由 B3.1.7 的结果可知 $\mathscr{C}A\in\mathscr{F}$，从而得证． □

另外提醒读者应注意下面两个问题，否则也常常会引起错误．

1. 当考虑 X 的子空间 S 时，S 中的网 $\xi: D\to S$，$\xi=\langle x_d\rangle_{d\in D}$．自然地可视为 X 中的网，因为 $i_S\circ\xi: D\to X$ 是 X 的网，且$\forall d\in D$，$i_S\circ\xi(d)=\xi(d)=x_d$．故也可用$\langle x_d\rangle_{d\in D}$表示．但 S 的滤子 $\mathscr{F}$ 却不是 X 的滤子，因为 X 的滤子必定包含 X，但因 $\mathscr{F}$ 是 S 的滤子(当 S 是真子空间时)，$X\notin\mathscr{F}$，不过 $\mathscr{F}$ 作为 X 的子集族具有有限交性质，故可生成 X 的一个滤子，我们把这个滤子视为子空间的滤子在原始空间中的自然的表示．可见 C3.1.6 中的表述．

2. 设 $f: X\to Y$．

若 ξ 为 X 的网，则 $f\circ\xi$ 自然也是 Y 的网，可视为 ξ 在 f 下的像．

但若 $\mathscr{F}$ 为 X 的滤子，则 $f(\mathscr{F})=\{f(F)\mid F\in\mathscr{F}\}$就未必是 Y 的滤子，比如 $f(X)\neq Y$ 时，Y 就不属于 $f(\mathscr{F})$．不过 $f(\mathscr{F})$具有有限交性质，可生成滤子，不难验证这个滤子为

$$f^*(\mathscr{F})\overset{\text{def}}{=\!=}\{G\subset X\mid\exists\ F\in\mathscr{F}\ \text{s.t.}\ f(F)\subset G\}.$$

我们称 $f^*(\mathscr{F})$为 $\mathscr{F}$ 在 f 下的像滤子．

对于“原像”更复杂一些．

如果$\eta=\langle y_d\rangle_{d\in D}$是$Y$的网，一般地$\eta$没有原像．当$f$为满射时，$\forall\ d\in D$选取一点$x_d\in f^{-1}(\{y_d\})$，则$\langle x_d\rangle_{d\in D}$可视为$\eta$的原像，显然$\eta$的原像不唯一．因此对于$X$的网$\xi$，$f\circ\xi$的原像（如果存在的话）未必就是$\xi$.

如果$\mathscr{G}$是Y的滤子，一般地$f^{-1}(\mathscr{G})=\{f^{-1}(G)\mid G\in\mathscr{G}\}$甚至可以没有有限交性质，因为$\varnothing$就可能属于$f^{-1}(\mathscr{G})$. 当$f$为满射时，则$f^{-1}(\mathscr{G})$具有有限交性质，但未必是滤子，不过它可生成一个滤子可记为$f_*^{-1}(\mathscr{G})$，可称之为$\mathscr{G}$的原像滤子，可以证明$f^*f_*^{-1}(\mathscr{G})=\mathscr{G}$.

在f为满射时，尽管Y的每个滤子都有原像滤子，但对于X的滤子$\mathscr{F}$，$f^*(\mathscr{F})$的原像滤子$f_*^{-1}f^*(\mathscr{F})$未必等于$\mathscr{F}$，一般地只能是$f_*^{-1}f^*(\mathscr{F})\subset\mathscr{F}$. 这正如$Y$的网$\eta$的原像不唯一是雷同的．

以上这些事实，读者可自行验证．

C 练习题

3.1.1 设ξ为X的网（$\xi: D\to X$），$\eta:\Delta\to X$为ξ的子网，$\zeta:\Gamma\to X$为η的子网．证明ζ也是ξ的子网．

3.1.2 设$\xi: D\to X$是X的网，$A\subset X$. 证明：

(1) ξ终于$A\Leftrightarrow\xi$不常在$\mathscr{C}A$.

(2) ξ常在$A\Leftrightarrow\xi$不终于$\mathscr{C}A$.

3.1.3 拓扑空间X的任一常值网

$$\xi: D\to X,\ d\mapsto\xi(d)=c,$$

（c是X的固定的点）总是收敛的，且

$$\mathrm{Lim}\xi=\mathrm{Adh}\xi=\overline{\{c\}}.$$

3.1.4 (1) 设X为无限集，$\mathscr{F}=\{F\subset X\mid\mathscr{C}F\text{ 有限}\}$证明$\mathscr{F}$为$X$的滤子．

(2) 设X为不可数集，$\mathscr{F}=\{F\subset X\mid\mathscr{C}F\text{ 可数}\}$，证明$\mathscr{F}$是$X$的滤子．

3.1.5 设$f: X\to Y$，$g: Y\to Z$. 证明：

$$(g\circ f)^*(\mathscr{F})=g^*(f^*(\mathscr{F})).$$

其中$\mathscr{F}$为X的滤子，$f^*(\mathscr{F})$的意义如B中所述．

3.1.6 设A为X的子空间，$\mathscr{F}$为A的滤子，易见$\mathscr{F}$具有有限交性质，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$生成的X的滤子，证明：

(1) $\mathrm{Lim}_A\mathscr{F}=A\cap\mathrm{Lim}_X\mathscr{G}$.

(2) $\mathrm{Adh}_A\mathscr{F}=A\cap\mathrm{Adh}_X\mathscr{G}$.

其中Lim_A，Lim_X，Adh_A，Adh_X的意义同B3.1.2.

3.1.7 设$X=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$，$p_\lambda: X\to X_\lambda$为投影．证明：

(1) 如果$\mathscr{F}_\lambda$是X_λ的滤子（$\forall\ \lambda\in\Lambda$），则$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}p_\lambda^{-1}(\mathscr{F}_\lambda)$具有有限交性质，可生成一个滤子$\mathscr{F}$，称之为$\{\mathscr{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的积滤子．

(2) 如果$\mathscr{F}$是X的滤子，$\mathscr{G}$是$\{p_\lambda^*(\mathscr{F})\}_{\lambda\in\Lambda}$的积滤子，那么$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$. 其中$p_\lambda^*(\mathscr{F}_\lambda)$的意义如B的最后一段所述．以后类似的符号都表示这个意义．

(3) 如果 $\mathscr{F}_\lambda$ 是 X_λ 的滤子($\forall\ \lambda\in\Lambda$),$\mathscr{F}$ 是$\{\mathscr{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的积滤子,那么$\forall\ \lambda\in\Lambda, p_\lambda^*(\mathscr{F})=\mathscr{F}_\lambda$.

3.1.8 判断下述滤子是否为超滤子?

(1) X 为无限集,$p\in X$,固定,$\mathscr{F}=\{F\subset X\,|\,p\in F\}$.

(2) X 为无限集,$A\subset X$ 固定,且至少有两个不同的点.$\mathscr{G}=\{G\subset X\,|\,A\subset G\}$.

(3) $\mathscr{F}_1=\{F\subset\mathbf{R}\,|\,\mathscr{C}F$ 有限$\}$.

(4) $\mathscr{F}_2=\{F\subset\mathbf{R}\,|\,\mathscr{C}F$ 可数$\}$.

3.1.9 证明 X 的任一滤子 $\mathscr{F}$ 都有

$$\mathscr{F}=\bigcap\{\mathscr{G}\,|\,\mathscr{G}\text{ 是 }X\text{ 的超滤子且 }\mathscr{G}\supset\mathscr{F}\}.$$

3.1.10 如果$\{\mathscr{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为空间 X 的一族滤子,证明:

$$\mathrm{Lim}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Lim}\mathscr{F}_\lambda.$$

3.1.11 证明对于拓扑空间 X 的任一滤子 $\mathscr{F}$,都有

(1) $\mathrm{Adh}\mathscr{F}=\bigcup\{\mathrm{Lim}\mathscr{G}\,|\,\mathscr{G}$ 为 X 的超滤子且 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}\}$.

(2) $\mathrm{Lim}\mathscr{F}=\bigcap\{\mathrm{Adh}\mathscr{G}\,|\,\mathscr{G}$ 为 X 的超滤子且 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}\}$.

3.1.12 设 $\mathscr{F}$ 为 E^1 的滤子,$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ F\in\mathscr{F}$ s.t. $\delta(F)<\varepsilon$. 证明 $\exists\ x_0\in E^1$ s.t.

$$\mathrm{Adh}\mathscr{F}=\{x_0\}=\mathrm{Lim}\mathscr{F}.$$

其中 $\delta(F)$表示 F 的直径.

§3.2 网与滤子的相互关系

A 内容提要

3.2.1 定义 (1) 设 ξ 为 X 的网,称滤子

$$\mathscr{F}=\{F\subset X\,|\,\xi\text{ 终于 }F\}$$

为由 ξ 导出的滤子,记作 $\mathscr{F}=\varphi(\xi)$.

(2) 设 $\mathscr{F}$ 为 X 的滤子,取

$$D=\{\langle x,F\rangle\,|\,x\in F\in\mathscr{F}\}$$

并定义

$$\langle x_1,F_1\rangle<\langle x_2,F_2\rangle\Leftrightarrow F_2\subset F_1$$

则$<$是 D 的定向,再令

$$\xi: D\to X,\ d=\langle x,F\rangle\mapsto\xi(d)=x.$$

称网 ξ 为由 $\mathscr{F}$ 导出的网,记作 $\xi=\psi(\mathscr{F})$.

(3) X 的两个网 ξ,η 如果导出相同的滤子,则称 ξ 与 η 等价,记作 $\xi\sim\eta$.

3.2.2 定理 (1) 设 $\mathscr{F}$ 为 X 的滤子,$\xi=\psi(\mathscr{F})$,$\mathscr{G}=\varphi(\xi)$,则 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$,即 $\varphi\psi(\mathscr{F})=\mathscr{F}$.

(2) 设 ξ 为 X 的网，$\mathscr{F}=\varphi(\xi)$，$\eta=\psi(\mathscr{F})$，则 $\eta\sim\xi$，即 $\psi\varphi(\xi)\sim\xi$.

3.2.3 定理　设 ξ 为 X 的网，$\mathscr{F}$ 为 X 的滤子，如果 $\mathscr{F}=\varphi(\xi)$ 或 $\xi=\psi(\mathscr{F})$，又 $\eta\sim\xi$，$A\subset X$，则

(1) η 常在 $A\Leftrightarrow\xi$ 常在 $A\Leftrightarrow\forall\ F\in\mathscr{F}$，$F\cap A\neq\varnothing$.

(2) η 终于 $A\Leftrightarrow\xi$ 终于 $A\Leftrightarrow A\in\mathscr{F}$.

(3) 当 X 为拓扑空间时，

$$\mathrm{Adh}\eta=\mathrm{Adh}\xi=\mathrm{Adh}\mathscr{F},$$
$$\mathrm{Lim}\eta=\mathrm{Lim}\xi=\mathrm{Lim}\mathscr{F}.$$

3.2.4 定理　(1) 如果 ξ,η 为 X 的网，η 是 ξ 的子网，则滤子 $\varphi(\xi)\subset\varphi(\eta)$.

(2) 设 ξ 为 X 的网，$\mathscr{G}$ 为 X 的滤子，如果 $\mathscr{G}\supset\varphi(\xi)$，则存在 ξ 的子网 η 使 $\mathscr{G}=\varphi(\eta)$.

(3) 如果 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 为 X 的滤子且 $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$，$\xi=\psi(\mathscr{F})$，$\eta=\psi(\mathscr{G})$，则存在 ξ 的子网 η^* 使 $\eta^*\sim\eta$.

3.2.5 定理　拓扑空间 X 中的点 x 为网 ξ 的接触点$\Leftrightarrow$存在 ξ 的子网 η 收敛于 x.

B 例题

(一)

网与滤子两套收敛理论实质上是等价的．它们各有利弊，相辅相成．网可以导出滤子，滤子也可以导出网，并保持收敛关系(A3.2.3)．尽管这样，网与滤子彼此之间却不是一一对应的(A3.2.2(2)，A3.2.4(3)就反映了这一点)．因为对于一个固定的非空集 X 而言，X 的所有滤子构成一个集合，它是 $\mathscr{P}\mathscr{P}(X)$ 的子集．而"X 的所有网构成的集合"与"所有集合构成的集合"同样是没有意义的．因为它同样会导致悖论．这就有一点小小的麻烦．特别是涉及子网与较大滤子时，彼此之间就不能自然地转换了．等价网的概念正是为了解决这个麻烦而引进的．既然网与滤子是用来讨论收敛性问题的．正如序列的收敛性一样，它完全取决于序列的尾部而与它前面的任意有限项是无关的．因此把终于相同集合的两个网叫做等价的．这是很自然的．如果把等价的网当作同一个网看待，在这个意义上网与滤子就一一对应了，并且子网与较大滤子之间也一一对应了(A3.2.2(2)，A3.2.4(3))．为了方便，我们可以考虑由 X 的一部分网构成的集合，称之为 X 的不等价网的完全集，记作 CN(X)，它满足两个条件：(i) 对于 X 的任何一个网 ξ，总存在网 $\eta\in\mathrm{CN}(X)$ 使 $\xi\sim\eta$. (ii) CN(X)中任意两个不同的网都不等价．于是 CN(X)与 X 的所有滤子构成的集合(记作 CF(X))是一一对应的．

事实上，对于 φ：$\mathrm{CN}(X)\to\mathrm{CF}(X)$，$\xi\mapsto\varphi(\xi)$，由条件 (ii) 知是单射，又对任一 $\mathscr{F}\in\mathrm{CF}(X)$，由条件 (i) 知存在 $\xi\in\mathrm{CN}(X)$ 使 $\xi\sim\psi(\mathscr{F})$．于是 $\varphi(\xi)=\varphi\psi(\mathscr{F})=\mathscr{F}$．故 φ 也是满射，这就证明了 CN(X)与 CF(X)是一一对应的．

3.2.1　试写出与 B3.1.6 相当的网的命题并加以证明．

解　与 B3.1.6 相当的命题是：

"对于拓扑空间 X 的任何一个网 ξ，都有 $\mathrm{Lim}\xi=\bigcap\{\mathrm{Adh}\eta\mid\eta\in\mathrm{CN}(X)$ 且 η 与 ξ 的子网

等价}".

证明如下:[法一]　设 $\mathscr{F}=\varphi(\xi)$. 我们证下述集合 Γ_1 与 Γ_2 一一对应:

$$\Gamma_1=\{\eta \mid \eta\in \mathrm{CN}(X) \text{ 且 } \eta \text{ 与 } \xi \text{ 的子网等价}\}$$

$$\Gamma_2=\{\mathscr{G} \mid \mathscr{G}\in \mathrm{CF}(X) \text{ 且 } \mathscr{F}\subset\mathscr{G}\}.$$

易见 $\varphi(\Gamma_1)\subset\Gamma_2$. 我们证 φ 在 Γ_1 上的限制(仍记作 φ)

$$\varphi: \Gamma_1\to\Gamma_2$$

是一一的,只需证 φ 为满射,因已知 φ 是单射.

设 $\mathscr{G}\in\Gamma_2$,由于 $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}=\varphi(\xi)$,故由 A3.2.4(2),存在 ξ 的子网 η^* 使 $\mathscr{G}=\varphi(\eta^*)$. 对于 η^* 又存在 $\eta\in\mathrm{CN}(X)$ 使 $\eta^*\sim\eta$,于是 $\varphi(\eta)=\varphi(\eta^*)=\mathscr{G}$. 故 φ 是满射,从而是一一的. 现在就有

$$\mathrm{Lim}\xi=\mathrm{Lim}\mathscr{F}=\bigcap\{\mathrm{Adh}\mathscr{G} \mid \mathscr{G}\in\mathrm{CF}(X) \text{ 且 } \mathscr{F}\subset\mathscr{G}\}$$

$$=\bigcap\{\mathrm{Adh}\eta \mid \eta\in\mathrm{CN}(X) \text{ 且 } \eta \text{ 与 } \xi \text{ 的子网等价}\}.$$

[法二]　只需证

$$\mathrm{Lim}\xi\supset\bigcap\{\mathrm{Adh}\eta \mid \eta\in\mathrm{CN}(X), \eta \text{ 与 } \xi \text{ 的子网等价}\}.$$

假定 $x\notin\mathrm{Lim}\xi$,则$\exists\ U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. ξ 不终于 U,即 ξ 常在 $\mathscr{C}U$. 若 $\xi=\langle x_d\rangle_{d\in D}$,则

$$\Delta=\{d\in D \mid x_d\in\mathscr{C}U\}$$

是 D 的共尾子集,由 B3.1.1 知 $\eta^*=\xi|_\Delta$ 是 ξ 的子网. 因 η^* 在 $\mathscr{C}U$ 中,由 C3.1.2(1)知 η^* 不会常在 U,所以 $x\notin\mathrm{Adh}\eta^*$. 又对于 $\eta^*\exists\ \eta\in\mathrm{CN}(X)$ s.t. $\eta^*\sim\eta$. 所以

$$x\notin\bigcap\{\mathrm{Adh}\eta \mid \eta\in\mathrm{CN}(X), \eta \text{ 与 } \xi \text{ 的子网等价}\}.$$

这就表明

$$\mathrm{Lim}\xi\supset\bigcap\{\mathrm{Adh}\eta \mid \eta\in\mathrm{CN}(X), \eta \text{ 与 } \xi \text{ 的子网等价}\}.$$

从而等式成立. □

涉及网的构造,常常会有面对有向集的茫茫大海不知所措的感觉. 这时改用滤子来处理就较为方便.

3.2.2　根据网与滤子的关系解 B3.1.3.

解　显然 $\mathscr{F}=\{F\subset X \mid C\subset F\}$是 X 的滤子,且

$$\mathrm{Adh}\mathscr{F}=\bigcap\{\overline{F} \mid F\in\mathscr{F}\}=\overline{C}=C.$$

于是令 $\xi=\psi(\mathscr{F})$,即 $\mathscr{F}$ 导出的网就合要求. □

注　虽然这里得到的网与 B3.1.3 中构造的网不一样,但容易验证它们是等价的.

3.2.3　证明对于任一网 $\xi: D\to X$,总存在集族 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$满足下述三个条件:

(1) $\mathscr{A}\neq\varnothing$且 ξ 常在 $\mathscr{A}$ 的每个元.

(2) $\mathscr{A}$ 的任意两个元之交属于 $\mathscr{A}$.

(3) $\forall\ A\subset X$ 或 $A\in\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{C}A\in\mathscr{A}$.

证　[法一]　设 $\mathscr{F}=\varphi(\xi)$,$\mathscr{A}$ 为包含 $\mathscr{F}$ 的超滤子,则 $\mathscr{A}$ 满足条件. 事实上,$\mathscr{A}\neq\varnothing$是显然的,又$\forall\ d\in D$, $B_d\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\{x_{d'} \mid d'>d\}\in\mathscr{F}\subset\mathscr{A}$,所以,$\forall\ A\in\mathscr{A}$,$B_d\cap A\neq\varnothing$,从而$\exists\ d'>d$ s.t. $\xi(d')=x_{d'}\in A$,即 ξ 常在 A. 条件(1)满足. 由于 $\mathscr{A}$ 是超滤子,故(2),(3)显然.

[法二]　不用网与滤子的关系,也不沿着由网导出滤子的思路,直接证明如下:

令

$$\Phi = \{\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X) \mid \mathscr{B} \text{ 满足}(1),(2)\}.$$

因$\{X\}\in\Phi$,故$\Phi\neq\varnothing$,由"$\subset$"给出Φ的偏序.设Ψ是Φ的全序子集,显然$\bigcup\Psi\in\Phi$且$\bigcup\Psi$是Ψ的一个上界.于是据Zorn引理.$\langle\Phi,\subset\rangle$有极大元$\mathscr{A}$,现只需证$\mathscr{A}$满足条件(3),为此先证

(*) 设$B\subset X$,若$\forall A\in\mathscr{A}$,ξ常在$A\cap B$,则$B\in\mathscr{A}$.

事实上,令

$$\mathscr{A}^* = \mathscr{A} \cup \{B\} \cup \{A \cap B \mid A \in \mathscr{A}\},$$

显然有$\mathscr{A}^*\in\Phi$且$\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^*$,由$\mathscr{A}$的极大性知$\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$,故$B\in\mathscr{A}$.

现证$\mathscr{A}$满足(3).设$A\subset X$,若$A\notin\mathscr{A}$,据(*)$\exists\ A_1\in\mathscr{A}$ s.t. ξ不常在$A_1\cap A$内,即$\exists\ d_0\in D$ s.t. $\forall\ d>d_0$,$x_d\notin A_1\cap A$即ξ终于$\mathscr{C}(A_1\cap A)=(\mathscr{C}A_1)\cup(\mathscr{C}A)$.

又$\forall\ A^*\in\mathscr{A}$,据(1)$\xi$常在$A^*$.所以$\xi$常在$A^*\cap(\mathscr{C}A_1\cup\mathscr{C}A)$.再由(*)$(\mathscr{C}A_1\cup\mathscr{C}A)\in\mathscr{A}$.再由(2) $A_1\cap(\mathscr{C}A_1\cup\mathscr{C}A)\in\mathscr{A}$,即$A_1\cap\mathscr{C}A\in\mathscr{A}$.所以$\forall\ A_0\in\mathscr{A}$,据(2) $A_0\cap(A_1\cap\mathscr{C}A)\in\mathscr{A}$.故由(1),$\xi$常在$A_0\cap(A_1\cap\mathscr{C}A)\subset A_0\cap\mathscr{C}A$.再由(*)即得,$\mathscr{C}A\in\mathscr{A}$. □

注　实际上满足条件(1),(2),(3)的集族$\mathscr{A}$必为X的超滤子.首先$\mathscr{A}$显然满足[F.1],[F.3].现设$A\in\mathscr{A}$,$B\supset A$,我们证$B\in\mathscr{A}$.若$B\notin\mathscr{A}$,则由(3)$\mathscr{C}B\in\mathscr{A}$,于是由(2) $A\cap\mathscr{C}B\in\mathscr{A}$,故由(1)$\xi$常在$A\cap\mathscr{C}B$.然而$A\cap\mathscr{C}B\subset A\cap\mathscr{C}A=\varnothing$,这是一个矛盾.所以[F.2]也满足,从而$\mathscr{A}$是滤子,再由(3)便知$\mathscr{A}$是超滤子,所以[法一]是自然的.

(二) 常见错误分析

3.2.4　试利用网与滤子关系证明下述两个命题是等价的:

(1) 如果ξ,η是拓扑空间X的网,η是ξ的子网,则

$$\mathrm{Lim}\xi \subset \mathrm{Lim}\eta.$$

(2) 如果$\mathscr{F}$,$\mathscr{G}$是拓扑空间X的滤子,$\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$,则

$$\mathrm{Lim}\mathscr{F} \subset \mathrm{Lim}\mathscr{G}.$$

试分析下述证明有何错误:

假定(1)成立.即如果η是ξ的子网,则

$$\mathrm{Lim}\xi \subset \mathrm{Lim}\eta.$$

现设$\mathscr{F}=\varphi(\xi)$,$\mathscr{G}=\varphi(\eta)$,则$\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$.由于

$$\mathrm{Lim}\mathscr{F} = \mathrm{Lim}\xi,\ \mathrm{Lim}\mathscr{G} = \mathrm{Lim}\eta.$$

所以

$$\mathrm{Lim}\mathscr{F} \subset \mathrm{Lim}\mathscr{G}.$$

反之,假定(2)成立.即如果$\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$,则

$$\mathrm{Lim}\mathscr{F} \subset \mathrm{Lim}\mathscr{G}.$$

现设$\xi=\psi(\mathscr{F})$,$\eta^*=\psi(\mathscr{G})$,则存在ξ的子网η使$\eta\sim\eta^*$.由于$\mathrm{Lim}\xi=\mathrm{Lim}\mathscr{F}$,$\mathrm{Lim}\eta=\mathrm{Lim}\eta^*=\mathrm{Lim}\mathscr{G}$.而$\mathrm{Lim}\mathscr{F}\subset\mathrm{Lim}\mathscr{G}$.所以

$$\mathrm{Lim}\xi \subset \mathrm{Lim}\eta.$$

即(1)成立.

分析　由(1)证明(2)时，$\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 是预先给定的 X 的滤子，且已知 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$，据题意是要在(1)成立的前提下证明 $\mathrm{Lim}\mathscr{F}\subset\mathrm{Lim}\mathscr{G}$. 所以应将已知的 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 转化为网，才能利用(1)的结果．而上述证明却把给定的 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 丢在一边，把它遗忘了，另外假设 $\mathscr{F},\mathscr{G}$，对于新假设的 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 去证明结论．这是不合逻辑的．正确的证明就应是：从已知的 $\mathscr{F},\mathscr{G}$ 出发．

令 $\xi=\psi(\mathscr{F})$，$\eta=\psi(\mathscr{G})$，由于 $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$，由 A3.2.4(3)，存在 ξ 的子网 η^*，使 $\eta^*\sim\eta$. 由(1)得

$$\mathrm{Lim}\xi \subset \mathrm{Lim}\eta^*$$

再由 A3.2.3(3)

$$\mathrm{Lim}\mathscr{F} = \mathrm{Lim}\xi \subset \mathrm{Lim}\eta^* = \mathrm{Lim}\eta = \mathrm{Lim}\mathscr{G}.$$

所以(2)成立．

至于上述第二部分由(2)成立证(1)也成立是类似的．　□

C　练习题

3.2.1　设 ξ 是 X 的网，$\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$ 满足条件：

(1) $\mathscr{A}\neq\varnothing$ 且 ξ 常在 $\mathscr{A}$ 的每个元．

(2) $\forall\ A_1,A_2\in\mathscr{A}\ \exists\ A_3\in\mathscr{A}$ s.t. $A_3\subset A_1\cap A_2$. 证明存在 ξ 的子网 η，使 η 终于 $\mathscr{A}$ 的每个元．

3.2.2　试叙述与 C3.1.3 相当的有关滤子的命题，并加以证明．

3.2.3　试叙述与 B3.1.4 相当的有关滤子的命题，并加以证明．

3.2.4　我们定义 X 的网 ξ 叫做 X 的万有网 $\Leftrightarrow\forall\ A\subset X$，$\xi$ 要么终于 A，要么终于 $\mathscr{C}A$. 证明：

(1) 万有网导出的滤子是超滤子，超滤子导出的网是万有网．

(2) 万有网的等价网是万有网．

(3) 万有网的子网是万有网．

(4) 设 $f: X\to Y$，ξ 为 X 的万有网，则 $f\circ\xi$ 为 Y 的万有网．

(5) X 的每个网都有一个子网是万有网．

(6) ξ 为 X 的万有网 $\Leftrightarrow\forall\ A\subset X$，若 ξ 常在 A，则 ξ 终于 A.

(7) 若 ξ 为拓扑空间 X 的万有网，则

$$\mathrm{Lim}\xi = \mathrm{Adh}\xi.$$

3.2.5　设 $f: X\to Y$，证明：

(1)若 ξ 为 X 的网，$\mathscr{F}=\varphi(\xi)$，则

$$\varphi(f\circ\xi) = f^*(\mathscr{F}) = f^*(\varphi(\xi))$$

(2) 若 $\mathscr{F}$ 为 X 的滤子，$\xi=\psi(\mathscr{F})$，$\eta=\psi(f^*(\mathscr{F}))$，则 $\eta\sim f\circ\xi$.

(3) 若 $\mathscr{F}$ 为 X 的超滤子，则 $f^*(\mathscr{F})$ 为 Y 的超滤子．

3.2.6　试叙述与 C3.1.11 相当的网的命题并加以证明．

附注　由本节的基本内容全面揭示了网与滤子这两套收敛理论的等价性，并利用等价网的概念，能使这两套理论中相应的命题可以自动转换．这样我们就可以扬长避短，发挥两

套理论各自的优势来处理有关问题．等价网的概念是编者由于讲授这门课程的需要，于1982年引进的，并写进了1983年的讲义，后又移植到了不分明拓扑空间，以简报形式发表于南京大学学报数学半年刊1985年第1期($p.50$--$p.52$)．在有关文献中，曾用“滤子基”的概念讨论过网与滤子基间的相互关系，遗憾的是文中给出的涉及子网与“加细滤子基”之间关系的一个命题是错误的，被编者用反例加以否定(详见数学半年刊NO.1(1985)发表的编者的短文)．不过与这一命题无关的其它一些结果还是很有用的．我们这里没有讨论滤子基．有兴趣的读者可参阅：R. G. Bartle, Nets and filters in topology, Amer. Math. Monthly, 62(1955), 551－557.

§3.3 收敛理论的初步应用

A 内容提要

3.3.1 定理　在拓扑空间 X 中，设 $A\subset X$，$x\in X$，下述条件等价：

(1) $x\in\overline{A}$.

(2) 存在 X 的滤子 $\mathscr{F}$ 使 $A\in\mathscr{F}$ 且 $x\in\mathrm{Lim}\mathscr{F}$.

(3) 存在 X 的网 ξ 使 ξ 终于 A 且 $x\in\mathrm{Lim}\xi$.

(4) 存在 A 中的网 η 使 $x\in\mathrm{Lim}\eta$.

(5) 存在 A 中的网 ζ 使 $x\in\mathrm{Adh}\zeta$.

(6) 存在 X 的滤子 $\mathscr{G}$ 使 $A\in\mathscr{G}$ 且 $x\in\mathrm{Adh}\mathscr{G}$.

3.3.2 定理　设 $f: X\to Y$，$x\in X$. 下述条件等价：

(1) f 在 x 处连续．

(2) 若 ξ 为 X 的网，$x\in\mathrm{Lim}\xi$，则 $f(x)\in\mathrm{Lim}f\circ\xi$.

(3) 若 $\mathscr{F}$ 为 X 的滤子，$x\in\mathrm{Lim}\mathscr{F}$，则 $f(x)\in\mathrm{Lim}f^{*}(\mathscr{F})$.

3.3.3 定理　设 $A\subset X$，且 $A\neq\varnothing$. 则

(1) A 为闭集$\Leftrightarrow$对 A 中每个网 ξ 都有 $\mathrm{Lim}\xi\subset A$.

(2) A 为闭集$\Leftrightarrow$对 X 的每个滤子 $\mathscr{F}$ 都有 $\mathrm{Lim}\mathscr{F}\subset A$.

注　这个定理简单地讲：A 为闭集等价于对网的收敛性与滤子收敛性是封闭的．

B 例题

这里主要是用网与滤子的收敛性来刻划闭集概念以及映射的连续性．特别是在用网刻划时，在形式上与数学分析或实变函数中用序列刻划的情形完全类似．解题方法也类似．

3.3.1　试用网或滤子的收敛性证明：对于 X 的子空间 S 的子集 $A\subset S$，有

$$\mathrm{Cl}_S A = (\mathrm{Cl}_X A) \cap S.$$

证 （一）用网

设 $x\in \mathrm{Cl}_S A$，则由 A3.3.1(4)存在 S 的网 $\xi: D\to S$ 使 $\xi(D)\subset A$ 且 $x\in \mathrm{Lim}_S\xi$. 由 B3.1.2 知

$$\mathrm{Lim}_S\xi = S \cap (\mathrm{Lim}_X(i_S \cdot \xi)).$$

所以 $x\in S$ 且 $x\in \mathrm{Lim}_X(i_S\cdot\xi)$. 由于 $i_S\cdot\xi(D)\subset A$，故由 A3.3.1(4)知 $x\in \mathrm{Cl}_X A$.

反过来，如果 $x\in(\mathrm{Cl}_X A)\cap S$，则 $x\in S$ 且存在 X 的网 $\xi: D\to X$ 使 $\xi(D)\subset A$ 且 $x\in \mathrm{Lim}_X\xi$. 令

$$\hat{\xi}: D\to S, d\mapsto \hat{\xi}(d)=\xi(d),$$

则 $\xi=i_S\cdot\hat{\xi}$，$\mathrm{Lim}_S\hat{\xi}=S\cap \mathrm{Lim}_X(i_S\circ\hat{\xi})=S\cap \mathrm{Lim}_X\xi$，所以 $x\in \mathrm{Lim}_S\hat{\xi}$，因 $\hat{\xi}(D)\subset A$，故 $x\in \mathrm{Cl}_S A$.

（二）用滤子

设 $x\in \mathrm{Cl}_S A$，则存在 S 的滤子 $\mathscr{F}$ 使 $A\in\mathscr{F}$ 且 $x\in \mathrm{Lim}_S\mathscr{F}$ 由 C3.1.6 知 $\mathrm{Lim}_S\mathscr{F}=S\cap \mathrm{Lim}_X\mathscr{G}$，其中 $\mathscr{G}$ 为由 $\mathscr{F}$ 生成的 X 的滤子，所以 $x\in S$ 且 $x\in \mathrm{Lim}_X\mathscr{G}$. 而 $A\in\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$，所以 $x\in(\mathrm{Cl}_X A)\cap S$.

反过来，设 $x\in(\mathrm{Cl}_X A)\cap S$. 则 $x\in S$ 且存在 X 的滤子 $\mathscr{F}$ 使 $A\in\mathscr{F}$ 且 $x\in \mathrm{Lim}_X\mathscr{F}$. 令

$$\mathscr{G} = \{F \cap S \mid F \in \mathscr{F}\}$$

易证 $\mathscr{G}$ 为 S 的滤子且 $A\in\mathscr{G}$，由 $\mathscr{G}$ 可生成 X 的一个滤子记为 $\mathscr{F}^*$，则 $\mathscr{F}\subset\mathscr{F}^*$. 而 $\mathscr{N}_X(x)\subset\mathscr{F}\subset\mathscr{F}^*$，故 $x\in \mathrm{Lim}_X\mathscr{F}^*$，又 $x\in S$，故

$$x \in S \cap \mathrm{Lim}_X\mathscr{F}^* = \mathrm{Lim}_S\mathscr{G}.$$

从而 $x\in \mathrm{Cl}_S A$. □

3.3.2 用网或滤子的收敛性证明：若 $f_i: X_i\to Y_i (i=1,2)$ 连续，则

$$\varphi: X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2,\ \langle x^1,x^2\rangle\mapsto\langle f_1(x^1),f_2(x^2)\rangle$$

也连续(C1.7.3).

证 （一）用网

设 $\xi=\langle x_d\rangle_{d\in D}$是 $X_1\times X_2$ 中收敛于点$\langle x^1,x^2\rangle$的网，其中 $x_d=\langle x_d^1,x_d^2\rangle$. 我们要证 $\varphi\circ\xi=\langle f_1(x_d^1),f_2(x_d^2)\rangle_{d\in D}$收敛于 $\varphi(x^1,x^2)=\langle f_1(x^1),f_2(x^2)\rangle$.

由于 f_1,f_2 均连续，且网$\langle x_d^i\rangle_{d\in D}$收敛于 x^i，所以$\langle f_i(x_d^i)\rangle_{d\in D}$收敛于 $f_i(x^i)$，$i=1,2$，从而 $\varphi\circ\xi$ 收敛于 $\varphi(x^1,x^2)=\langle f_1(x^1),f_2(x^2)\rangle$. 这就证明了 φ 连续.

（二）用滤子

设 $X_1\times X_2$ 中的滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于$\langle x^1,x^2\rangle$，则 X_i 中的滤子 $p_i^*(\mathscr{F})$收敛于 x^i. $p_i: X_1\times X_2\to X_i$ 为投影. 由于 f_i 连续. 所以 $f_i^*(p_i^*(\mathscr{F}))$收敛于 $f_i(x^i)$，$i=1,2$，现记 $\pi_i: Y_1\times Y_2\to Y_i$ 为投影. 我们证明

$$\pi_i^*\varphi^*(\mathscr{F}) = f_i^* p_i^*(\mathscr{F}).$$

事实上，

$$\pi_i^*\varphi^*(\mathscr{F}) = \{B\subset Y_i \mid \exists\ F\in\mathscr{F}\ \text{s.t.}\ \pi_i\varphi(F)\subset B\},$$

而

$$\pi_i\varphi(F) = \{f_ip_i(x) \mid x \in F\} = f_ip_i(F)$$

故

$$\pi_i^*\varphi^*(\mathscr{F}) = f_i^*p_i^*(\mathscr{F}).$$

所以

$$\pi_i^*\varphi^*(\mathscr{F}) \text{ 收敛于 } f_i(x^i), \qquad i = 1,2.$$

于是由 C3.2.3 得

$$\varphi^*(\mathscr{F}) \text{ 收敛于} \langle f_1(x^1), f_2(x^2)\rangle = \varphi(x^1, x^2),$$

从而 φ 连续. □

C 练习题

3.3.1 设 $X=X_1\times X_2$ 为积空间,$A\subset X_1$,$B\subset X_2$. 试用网或滤子证明:

$$\mathrm{Cl}_X(A \times B) = (\mathrm{Cl}_{X_1}A) \times (\mathrm{Cl}_{X_2}B).$$

3.3.2 用网或滤子证明 B1.7.2 的结果.

3.3.3 设 $f: X\to Y$,证明下述条件等价:

(1) f 连续.

(2) 对于 X 的每个网 ξ,$f(\mathrm{Adh}\xi)\subset \mathrm{Adh}f\circ\xi$.

(3) $\forall\, x\in X$ 及收敛于 x 的万有网 ξ,$f\circ\xi$ 收敛于 $f(x)$.

(4) $\forall\, x\in X$ 及收敛于 x 的超滤子 $\mathscr{F}$,$f^*(\mathscr{F})$收敛于 $f(x)$.

(5) 对于 X 的每个滤子 $\mathscr{F}$,$f(\mathrm{Adh}\mathscr{F})\subset \mathrm{Adh}f^*(\mathscr{F})$.

第四章　分离性与紧性(Ⅰ)

§4.1　分离公理[T_0]—[T_5]

A　内容提要

4.1.1 定义　拓扑空间 X 的[T_i]分离性,是指:

[T_0]　对 X 中任意两个不同的点,至少有一点存在一个邻域不包含另一点.

[T_1]　$\forall\ x,y\in X$ 且 $x\neq y$ $\exists\ U\in\mathscr{N}(x),V\in\mathscr{N}(y)$ s.t. $x\notin V$ 且 $y\notin U$. 等价地,$\forall\ x\in X$,$\{x\}$是闭集.

[T_2]　$\forall\ x,y\in X$ 且 $x\neq y$ $\exists\ U\in\mathscr{N}(x)$, $V\in\mathscr{N}(y)$ s.t. $U\cap V=\varnothing$.

[T_3]　$\forall\ x\in X$ 及不包含 x 的闭集 F,$\exists\ U,V\in\tau_X$ s.t. $x\in U$, $F\subset V$ 且 $U\cap V=\varnothing$.

[T_4]　对任意一对不相交的闭集 F_1,F_2, 存在不相交的开集 U_1,U_2 使 $F_i\subset U_i,i=1,2$.

[T_5]　对 X 的任意一对隔离子集 A,B,存在不相交的开集 U,V 使 $A\subset U,B\subset V$.

具有[T_i] 性质的空间 X,也叫 X 满足[T_i]分离公理.$i=0,1,2$ 时就分别叫 T_0 空间,T_1 空间,T_2 空间.T_2 空间也叫 Hansdorff 空间,具有[T_3],[T_4],[T_5]性质的空间,分别叫做正则空间,正规空间,完全正规空间.正则的 T_1 空间叫 T_3 空间,正规的 T_1 空间叫 T_4 空间,完全正规的 T_1 空间叫 T_5 空间.

显然 T_{i+1}空间$\Rightarrow T_i$ 空间,　　$i=0,1,2,3,4$.

度量空间是 T_5 空间.

4.1.2 定理　在 T_1 空间 X 中,任一子集 A 的聚点都是 A 的 ω-聚点.从而有限集没有聚点.

4.1.3 定理　下述条件是等价的:

(1) X 是 Hausdorff 的.

(2) X 的每个收敛网有唯一的极限.

(3) X 的每个收敛滤子有唯一的极限.

4.1.4 定理　(1) $\langle X,\tau_X\rangle$是正则的$\Leftrightarrow\forall\ x\in X$ 及 $U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau_X$,$\exists\ V\in\tau_X$ s.t.

$$x\in V\subset\overline{V}\subset U.$$

(2) $\langle X,\tau_X\rangle$是正规的$\Leftrightarrow$对 X 的每个闭集 F 以及包含 F 的开集 U,存在 $V\in\tau_X$ 使

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

B 例题

(一)

本节集中给出了分离性质(分离公理)$[T_0]-[T_5]$,主要的是$[T_1]-[T_4]$. 解题时关键是要抓住每个分离性的特征性质. 有关 Hausdorff 性质,有时用网(或滤子)来处理较为方便.

还要注意 $i \geqslant 3$ 时,有些著作的术语与我们所用的术语正好相反,T_i 空间未必蕴涵 T_1,而正则、正规、完全正规要求满足$[T_1]$. 读者在阅读不同的著作时,要注意这一差别.

4.1.1 证明 T_1 空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中,任一子集 A 的导集 A' 是闭集.

证 [法一] 我们证$(A')' \subset A'$. 设 $x \in (A')'$,则$\forall\ U \in \mathscr{N}(x) \cap \tau$, $U \cap (A'-\{x\}) \neq \varnothing$,故$\exists\ y \in U \cap (A'-\{x\})$. 于是 $U \in \mathscr{N}(y)$, $y \neq x$,且 $y \in A'$. 因 X 是 T_1 的,故$\exists\ V \in \mathscr{N}(y)$ s. t. $x \notin V$,当然有 $x \notin V \cap U$. 而 $V \cap U \in \mathscr{N}(y)$,所以

$$V \cap U \cap (A-\{y\}) \neq \varnothing,$$
$$U \cap (A-\{x\}) = (U-\{x\}) \cap A \supset ((V \cap U)-\{x\}) \cap A$$
$$= (V \cap U) \cap A \neq \varnothing.$$

从而 $x \in A'$,即得$(A')' \subset A'$, A' 为闭集.

[法二] 据杨忠道定理(B1. 2. 6),只需证$\forall\ x \in X$, $\{x\}'$ 是闭集. 由于 $\{x\}' \subset \overline{\{x\}} = \{x\}$. 所以$\{x\}' = \varnothing$ 是闭集. 从而 X 的每个子集 A 的导集 A' 是闭集. □

4.1.2 证明:如果 T_1 空间 $\langle X,\tau\rangle$ 有一个有限的基 $\mathscr{B}$,则 X 是仅含有限个点的离散空间.

证 设 $\mathscr{B}$ 有 n 个成员,而 X 为无限集. 取定 $x_1 \in X$ 则$\exists\ B_1 \in \mathscr{B}$ s. t. $x_1 \in B_1$. 现归纳地假定对于 X 的 k 个不同的点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 存在 $\mathscr{B}$ 的 k 个元 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 使$\forall\ j=1, 2, \cdots, k$, $x_j \in B_j$,且当 $j \geqslant 2$ 时, $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}$ 都不属于 B_j,从而 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 互异.

再取 $x_{k+1} \in X-\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$,则$\exists\ U_i \in \mathscr{N}(x_{k+1})$ s. t. $x_i \notin U_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$,于是 $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathscr{N}(x_{k+1})$ 且

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \cap (\bigcap_{i=1}^{k} U_i) = \varnothing.$$

又

$$\exists\ B_{k+1} \in \mathscr{B} \text{ s. t. } x_{k+1} \in B_{k+1} \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i,$$

从而

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \cap B_{k+1} = \varnothing.$$

故 $B_{k+1} \notin \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$. 于是由归纳原理可知$\forall\ m \in \mathbf{N}$,均存在 $\mathscr{B}$ 的 m 个不同的元,当 $m > n$ 时,这显然是不可能的. 所以 X 必为有限集.

既然 X 只含有限个点,又是 T_1 的,因此 X 的任一子集都是闭集,从而任一子集也都是

开集，所以是离散的． □

4.1.3 证明 T_1 空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中多于一点的连通子集是自稠密的（如果 $A\subset A'$ 则说 A 是自稠密的）.

证 设 A 为 X 的多于一点的连通子集．若 $\exists\ x\in A$ s.t. $x\notin A'$. 则 $\exists\ U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $U\cap(A-\{x\})=\varnothing$. 即 $U\cap A=\{x\}$，于是 $\{x\}$ 是子空间 A 的既开又闭的子集，因 A 多于一点，故 $\{x\}$ 为真子集．这就与 A 的连通性矛盾．所以 $A\subset A'$. 即 A 是自稠密的． □

4.1.4 $\langle X,\tau\rangle$ 是 Hausdorff 的 $\Leftrightarrow\forall\ x\in X$,

$$\{x\}=\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\}.$$

证 [法一] 依定义．

"$\Rightarrow$" $\forall\ x\in X$ 以及 $y\in\mathscr{C}\{x\}$，$\exists\ U\in\mathscr{N}(x),V\in\mathscr{N}(y)$ s.t. $U\cap V=\varnothing$，故 $y\notin\overline{U}$. 所以

$$\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\}\subset\{x\}.$$

从而

$$\{x\}=\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\}.$$

"$\Leftarrow$" $\forall\ x,y\in X$ 且 $x\neq y$，由假设条件知

$$x\notin\bigcap\{\overline{V}\mid V\in\mathscr{N}(y)\}.$$

故 $\exists\ V\in\mathscr{N}(y)$ s.t. $x\notin\overline{V}$. 于是 $\exists\ U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $U\cap V=\varnothing$，这就证明了 X 是 Hausdorff 的．

[法二] 用滤子

"$\Rightarrow$" 若 $\exists\ y\neq x$ s.t. $y\in\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\}=\mathrm{Adh}\mathscr{N}(x)$. 则存在滤子 $\mathscr{F}$ 使 $\mathscr{N}(x)\subset\mathscr{F}$ 且 $y\in\mathrm{Lim}\mathscr{F}$. 即 x,y 都是 $\mathscr{F}$ 的极限点，这与 Hausdorff 空间中滤子极限的唯一性矛盾．所以

$$\{x\}=\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\}$$

"$\Leftarrow$" 若 X 不是 Hausdorff 的，则存在 X 的一个收敛滤子 $\mathscr{F}$ 至少有两个极限 $x,y(x\neq y)$. 于是

$$\mathscr{N}(x)\cup\mathscr{N}(y)\subset\mathscr{F}.$$

所以

$$x\in\mathrm{Adh}\mathscr{N}(y)=\bigcap\{\overline{V}\mid V\in\mathscr{N}(y)\}=\{y\},$$

即 $x=y$，矛盾．

[法三] 用网

"$\Rightarrow$" 若 $\exists\ x,y\in X$ 且 $x\neq y$ 使

$$y\in\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\},$$

则 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$ 以及 $V\in\mathscr{N}(y)$，$U\cap V\neq\varnothing$. 与 X 的 Hausdorff 性质矛盾．所以 $\forall\ x\in X$,

$$\{x\}=\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\}.$$

"$\Leftarrow$" 若 X 不是 Hausdorff 的．则存在 $\xi=\langle x_d\rangle_{d\in D}$ 它至少有两个极限 $x,y(x\neq y)$. 于是 ξ 终于每个 $U\in\mathscr{N}(x)$，也终于每个 $V\in\mathscr{N}(y)$. 故 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$，$\forall\ V\in\mathscr{N}(y)$，$\exists\ d_0\in D$ s.t. $d>d_0$ 时，$x_d\in U\cap V$. 即 $U\cap V\neq\varnothing$. 所以 $y\in\bigcap\{\overline{U}\mid U\in\mathscr{N}(x)\}$，与假设条件矛盾．所以 X 是 Hausdorff 的． □

4.1.5 设 $f,g: X\to Y$ 连续，Y 是 Hausdorff 的．证明：

(1)

$$E \xlongequal{\text{def}} \{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$$

是 X 的闭集．

(2) 如果 D 为 X 的稠密子集且 $f|_D=g|_D$，则 $f=g$.

证 (1) 可有下述多种方法．

［法一］ 设 $x\in\mathscr{C}E$，则 $f(x)\neq g(x)$，于是 $\exists\, G\in\mathscr{N}_Y(f(x))$ 及 $W\in\mathscr{N}_Y(g(x))$ s.t. $G\cap W=\varnothing$. 因 f,g 连续，故 $\exists\, U\in\mathscr{N}_X(x),V\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. $f(U)\subset G$, $g(V)\subset W$. $U\cap V\in\mathscr{N}_X(x)$，且 $\forall\, z\in U\cap V, f(z)\neq g(z)$，即 $U\cap V\subset\mathscr{C}E$. 从而 $\mathscr{C}E$ 是 X 的开集，即 E 为 X 的闭集．

［法二］ 设 $\langle x_d\rangle_{d\in D}$ 为 E 中的网，$x\in\operatorname{Lim}\langle x_d\rangle_{d\in D}$. 因 $\forall\, d\in D$, $x_d\in E$，故 $f(x_d)=g(x_d)$. 由于 f,g 都连续，所以 $\{f(x),g(x)\}\subset\operatorname{Lim}_Y\langle f(x_d)\rangle_{d\in D}=\operatorname{Lim}_Y\langle g(x_d)\rangle_{d\in D}$.

由于 Y 是 Hausdorff 的，据极限的唯一性有

$$f(x)=g(x),\quad x\in E.$$

这就表明 $\operatorname{Lim}_X\langle x_d\rangle_{d\in D}\subset E$. 从而 E 为闭集．

［法三］ 设 $\mathscr{F}$ 是 X 的滤子，$E\in\mathscr{F}$，$x\in\operatorname{Lim}_X\mathscr{F}$. 则

$$f(x)\in\operatorname{Lim}_Y f^*(\mathscr{F}),\qquad g(x)\in\operatorname{Lim}_Y g^*(\mathscr{F}).$$

由 $E\in\mathscr{F}$ 可知，$\{F\cap E\mid F\in\mathscr{F}\}\xlongequal{\text{def}}\mathscr{F}_E$ 具有有限交性质，于是 $f(\mathscr{F}_E)=g(\mathscr{F}_E)$ 也具有有限交性质，故可生成 Y 的一个滤子 $\mathscr{G}$. 我们证

$$f^*(\mathscr{F})\cup g^*(\mathscr{F})\subset\mathscr{G}.$$

设 $G\in f^*(\mathscr{F})$，则$\exists\, F\in\mathscr{F}$ s.t. $G\supset f(F)\supset f(F\cap E)$，所以 $G\in\mathscr{G}$，从而 $f^*(\mathscr{F})\subset\mathscr{G}$，同理 $g^*(\mathscr{F})\subset\mathscr{G}$.

于是 $f(x)\in\operatorname{Lim}_Y f^*(\mathscr{F})\subset\operatorname{Lim}_Y\mathscr{G}$，$g(x)\in\operatorname{Lim}_Y g^*(\mathscr{F})\subset\operatorname{Lim}_Y\mathscr{G}$. 从而 $f(x)=g(x)$，$x\in E$. 这就证明了 $\operatorname{Lim}_X\mathscr{F}\subset E$. 即 E 为闭集．

(2) 因 $f|_D=g|_D$，故 $D\subset E$，而 $X=\overline{D}\subset\overline{E}=E$. 可见 $X=E$，即$\forall\, x\in X, f(x)=g(x)$. 即 $f=g$. □

注 由上述诸种方法可见，在证明 Hausdorff 空间的子集为闭集时，利用网的收敛性是很方便的．就同在《实变函数》、《复变函数》等课程中用序列收敛性证明一个子集为闭集一样，这个方法应掌握．

4.1.6 设 X 为 Hausdorff 空间，$f: X\to X$ 连续，且 $f\circ f=f$. 证明 $f(X)$ 是 X 的闭集．

证 ［法一］ 设 $x\in\mathscr{C}f(X)$，则 $x\neq f(x)$，故 $\exists\, U_1\in\mathscr{N}(x),V\in\mathscr{N}(f(x))$ s.t. $U_1\cap V=\varnothing$. 又 f 连续，故 $\exists\, U_2\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $f(U_2)\subset V$. 令 $U=U_1\cap U_2$，则 $U\in\mathscr{N}(x)$，且 $U\subset\mathscr{C}f(X)$.

事实上，若存在 $z\in U$ 使 $z\in f(X)$，即 $\exists\, y\in X$ s.t. $z=f(y)$. 于是

$$f(z)=ff(y)=f(y)=z,$$

而 $f(z)\in f(U)\subset V$，这样，$z\in U\cap V\subset U_1\cap V=\varnothing$，导致矛盾．所以 $U\subset\mathscr{C}f(X)$，即 $f(X)$ 是闭集．

［法二］ 设ξ为$f(X)$中的网，$y\in \mathrm{Lim}\xi$. 因$f\cdot f=f$，故$f\cdot\xi=\xi$，由f的连续性知

$$f(y)\in \mathrm{Lim}f\cdot\xi=\mathrm{Lim}\xi.$$

再由极限唯一有$y=f(y)$. 即$y\in f(X)$，于是$\mathrm{Lim}\xi\subset f(X)$. 故$f(X)$是闭集.

［法三］ 设$\mathscr{F}$是X的滤子，且$f(X)\in\mathscr{F}$，设$y\in\mathrm{Lim}\mathscr{F}$. 要证$y\in f(X)$.

因$f^{-1}(\mathscr{F})$具有有限交性质(这是因为$f(X)\in\mathscr{F}$的缘故)，故可生成X的滤子$\mathscr{G}$，可以验证$f^*(\mathscr{G})=\mathscr{F}$. (留给读者自己验证). 又

$$f^*(\mathscr{F})=f^*f^*(\mathscr{G})=f^*(\mathscr{G})=\mathscr{F}.$$

故由f的连续性知

$$f(y)\in\mathrm{Lim}f^*(\mathscr{F})=\mathrm{Lim}\mathscr{F}.$$

再由极限的唯一性知$y=f(y)\in f(X)$. 正是我们所要证明的，从而$f(X)$为闭集. □

4.1.7 设$\langle X,\tau\rangle$是无限的Hausdorff空间，证明：

(1) 存在X的无限多个非空开集，互不相交.

(2) 如果$\langle X,\tau\rangle$又是第二可数的，则$\mathrm{Card}\tau=2^{\aleph_0}$.

证 (1) 若$X'=\varnothing$，则$\forall\ x\in X\ \exists\ U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $U\cap(X-\{x\})=\varnothing$，即$\{x\}=U\in\tau$. 于是$X$是离散的. 结论当然成立.

现假定$x\in X'$. 取$x_1\in X-\{x\}$，则$\exists\ G_1,U_1\in\tau$ s.t. $x_1\in G_1$，$x\in U_1$且$G_1\cap U_1=\varnothing$.

现归纳地假设$\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}\subset\tau-\{\varnothing\}$，且当$i\neq j$时，$G_i\cap G_j=\varnothing$，且有$\{U_1,U_2,\cdots,U_n\}\subset\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $U_{i+1}\subset U_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，$G_i\cap U_i=\varnothing(i=1,2,\cdots,n)$. 我们如下定义$G_{n+1}$.

因$U_n\cap(X-\{x\})\neq\varnothing$，可取$x_{n+1}\in U_n\cap(X-\{x\})$，则

$$\exists\ G_{n+1}^*,U_{n+1}^*\in\tau\ \text{s.t.}\ x_{n+1}\in G_{n+1}^*,\ x\in U_{n+1}^*$$

且$G_{n+1}^*\cap U_{n+1}^*=\varnothing$. 令

$$G_{n+1}=G_{n+1}^*\cap U_n,\qquad (U_{n+1}=U_{n+1}^*\cap U_n),$$

则$x_{n+1}\in G_{n+1}$，故$G_{n+1}\neq\varnothing$，且$\forall\ i=1,2,\cdots,n$

$$G_{n+1}\cap G_i=G_{n+1}^*\cap U_n\cap G_i\subset G_{n+1}^*\cap U_i\cap G_i=\varnothing.$$

由归纳原理可得$\{G_n|n\in\mathbf{N}\}\subset\tau-\{\varnothing\}$，即合要求.

(2) 由B1.3.10已知$\mathrm{Card}\tau\leqslant 2^{\aleph_0}$. 现再证相反的不等式. 由(1)知$X$有一个非空开集的无限族. 它们彼此互不相交，记这个开集族为$\mathscr{G}$，定义

$$f:\mathscr{P}(\mathscr{G})-\{\varnothing\}\to\tau,\qquad \mathscr{A}\mapsto f(\mathscr{A})=\bigcup\mathscr{A}.$$

则f显然是单射，所以

$$\begin{aligned}2^{\aleph_0}&\leqslant\mathrm{Card}\mathscr{P}(\mathscr{G})=\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathscr{G})-\{\varnothing\})\\&\leqslant\mathrm{Card}\tau.\end{aligned}$$

□

4.1.8 设X为第一可数的，则X是Hausdorff的$\Leftrightarrow X$中每一收敛序列的极限是唯一的.

证 "$\Rightarrow$" 显然(这不需要第一可数性).

"$\Leftarrow$" 若X不是Hausdorff的，则$\exists\ x,y\in X$, s.t. $x\neq y$且$\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$及$V\in\mathscr{N}(y)$，$U\cap V\neq\varnothing$.

现设$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，$\{V_n\}_{n\in\mathbf{N}}$分别为 x,y 处的渐缩的可数开邻域基．则$\forall n\in\mathbf{N}, U_n\cap V_n\neq\varnothing$. 于是取 $x_n\in U_n\cap V_n$，显然序列$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$同时有两个极限 x 与 y. 与所设条件矛盾． □

注　如果删去"第一可数"的条件，则结论不真．例如不可数集上取可数补拓扑，则它的每个收敛序列的极限是唯一的(B1.2.11)．但是两个不同的点 x,y 的任意邻域的补集总是可数的，故 x 的任一邻域与 y 的任一邻域必相交，即这个空间不是 Hausdorff 的．

4.1.9　设 $A=\{\pm\frac{1}{n}|n\in\mathbf{N}\}$，

$$U_n(x)=(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}),\quad x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}.$$

$$\mathscr{B}(0)=\{U_n(0)-A|n\in\mathbf{N}\},$$

$$\mathscr{B}(x)=\{U_n(x)|n\in\mathbf{N}\}\qquad(x\neq 0).$$

在 $\mathbf{R}$ 上以$\{\mathscr{B}(x)|x\in\mathbf{R}\}$的元为相应点的邻域基生成拓扑 τ. (C1.5.8)．证明$\langle\mathbf{R},\tau\rangle$是 Hausdorff 的，但非正则的．

证　$\forall x,y\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq y$. 若 $x\neq0,y\neq0$，取 $n\in\mathbf{N}$ s. t. $\frac{1}{n}<\frac{1}{2}(|x-y|)$. 则 $U_n(x)\cap U_n(y)=\varnothing$.

若 $x=0$，取 $n\in\mathbf{N}$ s. t. $\frac{1}{n}<\frac{1}{2}|y|$，则

$$(U_n(0)-A)\cap U_n(y)=\varnothing.$$

所以$\langle\mathbf{R},\tau\rangle$是 Hausdorff 的．

现假定$\langle\mathbf{R},\tau\rangle$也是正则的，又显然 $0\in\mathscr{C}A\in\tau$，故 $\exists\, U\in\mathscr{N}(0)\cap\tau, V\in\tau$ s. t. $A\subset V$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 又据 τ 的定义 $\exists\, n\in\mathbf{N}$ s. t. $U_n(0)-A\subset U$.

又$\frac{1}{n+1}\in A\subset V$，故$\exists\, m\in\mathbf{N}$ s. t. $U_m(\frac{1}{n+1})\subset V$.

$$(U_n(0)-A)\cap U_m(\frac{1}{n+1})=\left((-\frac{1}{n},\frac{1}{n})-A\right)\cap\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m},\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m}\right)\neq\varnothing.$$

从而 $U\cap V\neq\varnothing$，矛盾．所以$\langle\mathbf{R},\tau\rangle$不是正则的． □

4.1.10　设$\langle X,\tau\rangle$为正则空间．证明：如果 X 的每个非空闭集都有一个孤立点(C1.2.7)，那么 X 的子集 $A=\{x\in X|\{x\}\in\tau\}$是 X 的稠密子集．

证　$\forall x\in X$ 以及 $U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$，由正则性，$\exists\, V\in\tau$ s. t. $x\in V\subset\overline{V}\subset U$. 据假设条件$\exists\, y\in\overline{V}-V'$. 则 $y\in V$ 且$\exists\, W\in\mathscr{N}(y)\cap\tau$ s. t. $\{y\}=W\cap V\in\tau$. 故 $y\in A$. 于是，$U\cap A\supset V\cap A\supset\{y\}$，所以 $x\in\overline{A}$. 这就证明了 A 是稠密的． □

4.1.11　设 X 是正规空间，$\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$是 X 的闭集的可数族．证明 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 是 X 的正规子空间(特别地正规空间的闭子空间是正规的)，但正规性不是遗传性质．

证　(1) 设 F_1,F_2 闭于 A 且 $F_1\cap F_2=\varnothing$，则$\forall i\in\mathbf{N}$，$F_1\cap A_i,F_2\cap A_i$ 都闭于 A_i，从而也闭于 X，且 $F_1\cap A_i\subset\mathscr{C}F_2, F_2\cap A_i\subset\mathscr{C}F_1$. 故$\exists\, U_i,V_i\in\tau$ s. t.

$$F_1\cap A_i\subset U_i\subset\overline{U}_i\subset\mathscr{C}F_2,\qquad F_2\cap A_i\subset V_i\subset\overline{V}_i\subset\mathscr{C}F_1.$$

令

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i-\bigcup_{j\leqslant i}\overline{V}_j),\qquad V=\bigcup_{i=1}^{\infty}(V_i-\bigcup_{j\leqslant i}\overline{U}_j).$$

则 U,V 开于 X 且 $F_1\subset U$，$F_2\subset V$，$U\cap V=\varnothing$. 所以 $G\overset{\text{def}}{=\!=}U\cap A$，$W\overset{\text{def}}{=\!=}V\cap A$ 均开于 A，且

$$F_1\subset G,\qquad F_2\subset W,\qquad G\cap W=\varnothing.$$

从而 A 是正规的.

(2) 任取 $\langle S,\tau_1\rangle$ 是一非正规空间，$p\notin S$，令 $X=S\cup\{p\}$，$\tau=\tau_1\cup\{X\}$，则 $\langle X,\tau\rangle$ 是拓扑空间(称为 S 的开扩张). 由于 X 的每个非空闭集都含 p，故 X 的任意一对不相交的闭集中必有一个是空集，因此 X 与 $\varnothing$ 就是分别包含这一对不相交闭集的不相交开集，因此 $\langle X,\tau\rangle$ 是正规的. 而 S 是 X 的子空间却非正规. 从而正规性不是遗传性质. □

4.1.12 (1) 证明拓扑空间 X 是完全正规的 $\Leftrightarrow X$ 的每个子空间是正规的.

(2) 证明 Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$ 是完全正规的 T_1 空间.

证 (1)"$\Rightarrow$" 假定 X 完全正规，$A\subset X$，F_1，F_2 为子空间 A 的两个不相交的闭子集. 则如同 B2.1.1 的第一部分一样可证 F_1,F_2 是 X 的一对隔离子集. 由 X 的完全正规性知，存在 X 的一对不相交的开集 U_1,U_2 使 $F_i\subset U_i(i=1,2)$. 令 $V_i=U_i\cap A$，则 V_i 开于 A，且 $F_i\subset V_i(i=1,2)$. $V_1\cap V_2=\varnothing$. 所以 A 作为子空间是正规的.

"$\Leftarrow$" 假定 X 的每个子空间是正规的，A,B 为 X 的一对隔离子集，考虑 $S=\mathscr{C}(\overline{A}\cap\overline{B})$，据假设条件，$S$ 作为 X 的子空间是正规的. 而 $S\cap\overline{A}$ 与 $S\cap\overline{B}$ 是 S 的两个不相交的闭集，因此存在 S 的两个不相交的开集 U,V 使

$$S\cap\overline{A}\subset U,\qquad S\cap\overline{B}\subset V.$$

而 S 本身开于 X，故 U,V 也是 X 的开集. 且

$$A\subset(\mathscr{C}\overline{B})\cap\overline{A}\subset S\cap\overline{A}\subset U,$$

同理 $B\subset V$. 这就表明 X 是完全正规的.

注 正因为这个结果，完全正规也叫遗传正规.

(2) 设 A,B 为 $\mathbf{R}_S$ 的一对隔离子集，则 $\forall\ x\in A\ \exists\ \varepsilon(x)>0$ s.t $[x,x+\varepsilon(x))\subset\mathscr{C}\overline{B}$；$\forall\ y\in B\ \exists\ \varepsilon(y)>0$ s.t. $[y,y+\varepsilon(y))\subset\mathscr{C}\overline{A}$. 令

$$U=\bigcup_{x\in A}[x,x+\varepsilon(x)),\qquad V=\bigcup_{y\in B}[y,y+\varepsilon(y)).$$

则 $A\subset U,B\subset V,U,V$ 都开于 $\mathbf{R}_S$，这些都很明显. 现若 $\exists\ z\in U\cap V$，则 $\exists\ x\in A$，以及 $y\in B$ s.t.

$$z\in[x,x+\varepsilon(x))\cap[y,y+\varepsilon(y)],$$

不妨假定 $x<y$. 则 $y\in[x,x+\varepsilon(x))\subset\mathscr{C}\overline{B}$，矛盾. 所以 $U\cap V=\varnothing$. 至此就证明了 $\mathbf{R}_S$ 是完全正规的. □

（二） 常见错误分析

4.1.13 证明拓扑空间 X 的正则性是遗传性质.

试分析下述证明有何错误.

设 S 为 X 的子空间，$\forall\ x\in S$ 以及 F 为 S 中不包含 x 的闭集，由于 $S\subset X$，故 $F\subset X$. 于是存在不相交的开集 $U,V\subset X$ 使 $x\in U,F\subset V$. 令

$$U_1=U\cap S,\quad V_1=V\cap S,$$

则 $U_1\cap V_1=\varnothing$ 且 $x\in U_1,F\subset V_1,U_1,V_1$ 是 S 的开集，所以 S 是正则的.

分析 上述证明中的错误是过去已经出现并分析过的．初学者常常会不自觉地忘记子空间的开集、闭集与原始空间的开集、闭集之间的区别与联系，在语言的叙述上也很含混．上述证明中的 F 到底是 X 的闭集还是子空间 S 的闭集呢？不能认为 $F\subset X$ 就是 X 的闭集．如果这样理解，那么每个子空间的任一闭集都是原始空间的闭集了，这当然是错误的．所以涉及到子空间时，对于一个子集是闭的（或开的）一定要明确说清楚是哪个空间的闭集（开集），绝对不能含混．准确的叙述应为：

$\forall x\in S$ 以及不包含 x 的 S 的闭集 F，存在 X 的闭集 F^* 使 $F=F^*\cap S$. 由于 $x\notin F$ 且 $x\in S$，故 $x\notin F^*$，于是由 X 的正则性，存在 X 的不相交的开集 U,V 使 $x\in U,F^*\subset V$. 令 $U_1=U\cap S$，$V_1=V\cap S$，则 U_1，V_1 开于 S 且 $x\in U_1$，$F\subset V_1$，$U_1\cap V_1=\varnothing$. 所以 S 是正则的． □

注 类似地可以证明[T_0]，[T_1]，[T_2]都是遗传的，我们已知[T_4]不是遗传的（B4.1.11）．[T_5]当然是遗传的（B4.1.12）．

C 练习题

4.1.1 考察下列空间是否满足[T_0]，[T_1]，[T_2]公理：

(1) 离散空间；

(2) 至少有两个点的平凡空间；

(3) E^n；

(4) 右序拓扑空间 $\mathbf{R}_{ro}$；

(5) Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$；

(6) $\mathbf{Z}$ 作为 $\mathbf{R}_{ro}$的子空间；

(7) 无限集构成的有限补空间；

(8) 不可数集构成的可数补空间；

(9) 至少有两个点的特殊点空间；

(10) 至少有两个点的排外点空间；

(11) Fort 空间．

4.1.2 (1)证明 X 是 T_1 空间$\Leftrightarrow\forall x\in X,\{x\}=\bigcap\mathscr{N}(x)$.

(2) 证明第一可数的 T_1 空间的每个单点集是 G_δ 集（B1.2.12）.

4.1.3 (1)设$\langle X,\tau\rangle$为 T_1 空间，证明：如果由有限个不同的点构成的序列$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛到 x，那么 $\exists\, n_0\in\mathbf{N}$ s.t. 当 $n\geqslant n_0$ 时，$x_n=x$.

(2) 举例说明如果$\langle X,\tau\rangle$不是 T_1 的，则上述结论不真．

4.1.4 证明 T_1 空间中任何多于一点的连通子集必为无限集．

4.1.5 设 $f:X\to Y$ 为连续的单映射．证明：如果 Y 是 Hausdorff 的，则 X 也是 Hausdorff 的．

4.1.6 设 $f:X\to Y$ 连续．证明：如果 Y 是 Hausdorff 的，那么 f 是积空间 $X\times Y$ 的闭子集（注 f 作为关系 $f\subset X\times Y$ 即为$\{\langle x,y\rangle\mid y=f(x),x\in X\}$，有的著作称之为 f 的图）.

4.1.7 证明拓扑空间 X 是 Hausdorff 的$\Leftrightarrow$积空间的对角线 $id_X=\{\langle x,x\rangle\mid x\in X\}$是闭

子集．

4.1.8 证明无限的 Hausdorff 空间 $\langle X,\tau\rangle$ 有无限子集 A，使 A 的每一点都是 A 的孤立点(C1.2.7)．

4.1.9 如果 $\langle X,\tau_1\rangle$ 满足 $[T_i](i=0,1,2)$ 公理，τ_2 也是 X 的拓扑且 $\tau_1\subset\tau_2$，证明 $\langle X,\tau_2\rangle$ 也满足同样的 $[T_i]$ 公理．但当 $i\geqslant 3$ 时不真．

4.1.10 设 A 为 X 的子空间，$r: X\to A$ 为连续映射，如果 $\forall\, x\in A, r(x)=x$（即 $r|_A=id_A$），则称 r 为收缩映射，称 A 为 X 的收缩核．证明：Hausdorff 空间 X 的收缩核 A 是 X 的闭子集．

4.1.11 设 $\mathscr{S}$ 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的子基．证明：X 正则 $\Leftrightarrow\forall\, x\in X$ 以及 $\mathscr{S}$ 中任一包含 x 的成员 V，存在 $U\in\mathscr{N}(x)$ 使 $\overline{U}\subset V$.

4.1.12 证明 $\langle X,\tau\rangle$ 为正则空间 $\Leftrightarrow\forall\, x\in X$ 以及不包含 x 的闭集 F，$\exists\, U,V\in\tau$ s. t.

$$x\in U,\quad F\subset V\quad 且\ \overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing.$$

4.1.13 证明第二可数的正则空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中，每个开集都是 F_σ 集(B1.2.12)．

4.1.14 设 $A=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbf{N}\}$，令 $\tau^*=\{G-B|G$ 开于 E^1 且 $B\subset A\}$.

(1) 验证 τ^* 是 $\mathbf{R}$ 的拓扑．

(2) 证明 $\langle\mathbf{R},\tau^*\rangle$ 是 Hausdorff 的，但非正则的，从而也非正规的．

4.1.15 证明 $\langle X,\tau\rangle$ 是正规的 $\Leftrightarrow$ 对于 X 的任意两个不相交的闭集 F_1,F_2，存在 $U_1,U_2\in\tau$ s. t.

$$F_1\subset U_1,\quad F_2\subset U_2\quad 且\quad \overline{U}_1\cap\overline{U}_2=\varnothing.$$

4.1.16 证明对于正规空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中任意两两不相交的闭集的有限族 $\{F_i|i=1,2,\cdots,n\}$，存在 $\{U_i|i=1,2,\cdots,n\}\subset\tau$ 使 $\forall\, i\leqslant n$, $F_i\subset U_i$ 且当 $i\neq j$ 时，$U_i\cap U_j=\varnothing$（注 如果所有 F_i 是有限的，命题中的正规性改成 Hausdorff 性质结论仍然成立）．

4.1.17 证明拓扑空间的正规性能被连续的闭映射保持．

4.1.18 证明 $\langle X,\tau\rangle$ 是完全正规的 $\Leftrightarrow X$ 的每个开子空间都是正规的．

4.1.19 证明积空间 $X\times Y$ 是 $[T_i]\,|\,(i=0,1,2,3)$ 的 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 也同样是 $[T_i]$ 的．

§4.2 完全正则空间·Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理

A 内容提要

4.2.1 定义 如果 X 满足下述公理

$[T_{3\frac{1}{2}}]$: $\forall\, x\in X$ 以及不包含 x 的闭集 F，存在连续映射 $f: X\to[0,1]$ 使

$$f(x)=0, f(F)\subset\{1\}.$$

则称 X 是完全正则的，完全正则的 T_1 空间叫 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间，也叫 Tychonoff 空间．

完全正则⇒正则．

4.2.2 定理　设 $\mathscr{S}$ 为 $\langle X,\tau\rangle$ 的子基，则 X 完全正则⇔$\forall\ x\in X$ 以及包含 x 的 $\mathscr{S}$ 的成员 S，存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0,f(\mathscr{C}S)\subset\{1\}$.

4.2.3 定理　X 是正规的⇔对 X 的任意一对不相交的闭集 F_1,F_2，总存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(F_1)\subset\{0\},f(F_2)\subset\{1\}$.

定理的必要性部分称为 Urysohn 引理．

$$T_4\text{ 空间 }\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}\text{ 空间 }\Rightarrow T_3\text{ 空间}.$$

4.2.4 定理（Tietze 扩张定理）　如果 X 为正规空间，则对定义在 X 的任一闭子空间 F 上的每个连续映射 $f:F\to[0,1]$ 总存在连续的 $g:X\to[0,1]$ 使 $g|_F=f$.

4.2.5 定理　正规的正则空间是完全正则的．

B 例题

（一）

完全正则性是用连续映射来刻划的，Unysohn 引理与 Tietze 扩张定理给出了正规性用连续映射刻划的特征性质．因此解有关完全正则空间与正规空间的问题时，常常与连续映射密切相关．

4.2.1　证明对于连通的 Tychonoff 空间 X，如果多于一点，那么它的每个非空开集都是不可数集，特别地 X 不可数．

证　设 G 为 X 的任一非空开集，$x\in G$.

(1) 若 $G=X$，则 $\exists\ y\in X$ s.t. $x\neq y$. 而 $\{y\}$ 为 X 的闭集，故存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0,f(y)=1$. 由 X 的连通性得 $f(X)=[0,1]$. 所以 X 不可数．

(2) 若 $G\neq X$. 则 $\mathscr{C}G\neq\varnothing$. 而 $\mathscr{C}G$ 为 X 的闭集，故存在连续映射 $g:X\to[0,1]$ 使 $g(x)=0,g(\mathscr{C}G)=\{1\}$. 仍由 X 的连通性得 $g(X)=[0,1]$. 又

$$g(X)=g(G)\cup g(\mathscr{C}G)=g(G)\cup\{1\}.$$

所以 $[0,1)\subset g(G)$，即 $g(G)$ 不可数，从而 G 不可数．　□

4.2.2　(1)证明在正规空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中，G 是开的 F_σ-集⇔$\exists\ f:X\to[0,1]$ 连续 s.t. 当 $x\in G$ 时，$f(x)>0$，$x\notin G$ 时，$f(x)=0$.

(2) 证明对于第二可数的正则空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的非空开集 G，总存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使当 $x\in G$ 时 $f(x)>0$，$x\notin G$ 时，$f(x)=0$.

证　(1)"⇒"　因 G 是 F_σ-集，设 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，其中 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，F_n 闭于 X. 于是 $\forall\ n$，$\mathscr{C}G$ 与 F_n 为不相交的闭集，故由 Urysohn 引理，存在连续映射 $f_n:X\to[0,1]$ 使 $f_n(\mathscr{C}G)\subset\{0\}$，$f_n(F_n)\subset\{1\}$. 定义

$$f:X\to[0,1],\ x\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{2^n}.$$

容易证明 f 连续，且当 $x\notin G$ 时，$f(x)=0$. 而当 $x\in G$ 时，$\exists\ n\in\mathbf{N}$ s.t. $x\in F_n$，故 $f(x)\geqslant\frac{1}{2^n}$

>0.

"$\Leftarrow$" 因为$(0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1},1]$，由所设条件

$$G=f^{-1}((0,1])=f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1},1]\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left([\frac{1}{n+1},1]\right).$$

其中$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$f^{-1}\left([\frac{1}{n+1},1]\right)$闭于$X$，所以$G$是$F_\sigma$-集又$(0,1]$开于$[0,1]$，故$G$开于$X$.

(2) 由C4.1.13知G为F_σ-集，并将由§4.4的结果(A4.4.4)可知第二可数的正则空间必为正规空间，从而由(1)即得所需的结果． □

4.2.3 设X为正规空间，F为X的闭子空间，证明对每个连续的$f:F\to E^1$，存在连续的$g:X\to E^1$使$g|_F=f$.

证 由于E^1与$(-1,1)$同胚，不妨用$(-1,1)$代替E^1. 下面考虑$f:F\to(-1,1)$，记$i_{(-1,1)}:(-1,1)\to[-1,1]$为包含映射，对于$i_{(-1,1)}\circ f:F\to[-1,1]$，由Tietze扩张定理，存在$h:X\to[-1,1]$连续，使$h|_F=i_{(-1,1)}\circ f$. 故$h(F)=f(F)$. 令$E=h^{-1}(\{-1,1\})$，则$E$为$X$的闭子集，且$E\cap F=\varnothing$. 于是存在$\varphi:X\to[0,1]$连续，使$\varphi(E)\subset\{0\}$，$\varphi(F)=\{1\}$.

$$\forall\ x\in X,\text{令}\ g(x)=\varphi(x)\cdot h(x).$$

则$\forall\ x\in X$，$g(x)\in(-1,1)$. 事实上，当$x\in E$时，$g(x)=0$(因$\varphi(x)=0$)，而当$x\notin E$时，$\varphi(x)\in[0,1]$，$h(x)\in(-1,1)$，故$g(x)=\varphi(x)\cdot h(x)\in(-1,1)$. 因此，我们定义了映射

$$g:X\to(-1,1),$$

由于φ，h连续，所以g连续．由于$\varphi(F)=\{1\}$，故当$x\in F$时，

$$g(x)=h(x)=i_{(-1,1)}\circ f(x)=f(x),$$

即$g|_F=f$.

一般地，对于$f:F\to E^1$连续，记$\psi:E^1\to(-1,1)$为同胚，则存在$g^*:X\to(-1,1)$使$g^*|_F=\psi\circ f$. 令$g:X\to E^1$为$g=\psi^{-1}\circ g^*$，则g连续，且$g|_F=\psi^{-1}\circ g^*|_F=\psi^{-1}\circ\psi\circ f=f$.

□

4.2.4 设X为正规空间，F为X的非空闭集，U为包含F的开集．若定义在积空间$X\times[0,1]$的子空间$S=(U\times[0,1])\cup(X\times\{0\})$上的映射$f:S\to Y$连续，证明存在连续的$g:X\times[0,1]\to Y$使在$(F\times[0,1])\cup(X\times\{0\})$上，$g=f$.

证 由于F与$X-U$是X的不相交的闭集．故由Urysohn引理，存在连续映射$\varphi:X\to[0,1]$使

$$\varphi(X-U)\subset\{0\},\ \varphi(F)=\{1\}.$$

$\forall\ \langle x,t\rangle\in X\times[0,1]$令

$$g(x,t)=f(x,t\varphi(x)).$$

当$x\notin U$时，$\langle x,t\varphi(x)\rangle=\langle x,0\rangle$，$\forall\ t\in[0,1]$成立．所以$\forall\ \langle x,t\rangle\in X\times[0,1]$，$g(x,t)$都有意义．这就定义一个映射

$$g:X\times[0,1]\to Y.$$

且当$\langle x,t\rangle\in(F\times[0,1])\cup(X\times\{0\})$时，$g(x,t)=f(x,t)$. 又由B1.7.2知$g$连续(因为可令$\varphi^*(x,t)=t\varphi(x)$，则$\varphi^*:X\times[0,1]\to[0,1]$连续). 这就完成了证明． □

（二） 常见错误分析

4.2.5 证明在 Tychonoff 空间$\langle X,\tau\rangle$中，$\forall\ x,y\in X$ 且 $x\neq y$，$\exists\ f:X\to E^1$ 连续使

$$f(x)\neq f(y).$$

分析下述证明错在何处．

取不包含 x 的闭集 F 使 $y\in F$，则存在 $f:X\to[0,1]$连续使 $f(x)=0,f(F)=\{1\}$．由于 $y\in F$，故 $f(y)=1$，于是 $f(x)\neq f(y)$．

分析 上述证明立足于能够取得不包含 x 而包含 y 的闭集 F 的基础上的，这样的 F 究竟存在否？若根本不存在岂非成了空中楼阁！初学者常会发生这类逻辑上的错误．应该引以为鉴．比如奇偶拓扑空间(B2.4.3)，对于 1，2，这两个不同的点，不存在只含其中一点而不包含另一点的闭集．上述命题的正确证明如下：

因为 Tychonoff 空间就是完全正则的 T_1 空间，由于是 T_1 的，故$\{y\}$就是不包含 x 的闭集．再由完全正则性，存在连续的 $g:X\to[0,1]$使 $g(x)=0,g(y)=1$，则 $f=i_{[0,1]}\circ g:X\to E^1$ 即为所求，其中 $i_{[0,1]}:[0,1]\to E^1$ 为包含映射． □

4.2.6 证明多于一点的连通的 T_4 空间 X 是不可数的．

考虑下述证明有何错误：

设 F_1,F_2 为 X 的两个不相交的非空闭集，则存在连续的 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(F_1)=\{0\},f(F_2)=\{1\}$．取 $x_1\in F_1,x_2\in F_2$，则 $f(x_1)=0,f(x_2)=1$．由介值定理得 $f(X)=[0,1]$，故 X 不可数．

分析 这里与前一题犯有同样的逻辑错误．即 F_1,F_2 的存在性未作交代．读者不难自行更正．事实上，这一命题是 B4.2.1 的特例． □

C 练习题

4.2.1 证明$\langle X,\tau\rangle$是 Tychonoff 空间$\Leftrightarrow\forall\ x\in X$ 以及任一不包含 x 的闭集或单点集 A，存在连续的 $f:X\to[0,1]$使 $f(x)=0,f(A)\subset\{1\}$.

4.2.2 记 $\mathscr{C}(X,[0,1])$为从 X 到$[0,1]$的所有连续映射构成的集合，$\forall\ f\in\mathscr{C}(X,[0,1])$记

$$Z_f=\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}$$

称之为 f 的余零集．证明：$\langle X,\tau\rangle$完全正则$\Leftrightarrow\{Z_f\mid f\in\mathscr{C}(X,[0,1])\}$是$\langle X,\tau\rangle$的一个基．

4.2.3 证明积空间 $X\times Y$ 是完全正则的$\Leftrightarrow X$ 与 Y 都是完全正则的．

4.2.4 设$\langle X,\tau\rangle$为 Tyehonoff 空间，$U\in\tau$，C 为 X 的连通子集，且 $U\cap C\neq\varnothing$．证明或者 C 为单点集或者 $U\cap C$ 不可数．

4.2.5 (1) 证明在正规空间$\langle X,\tau\rangle$中子集 F 是闭的 G_δ 集$\Leftrightarrow$存在连续的 $f:X\to[0,1]$使当 $x\in F$ 时，$f(x)=0$，当 $x\notin F$ 时，$f(x)>0$.

(2) 设 F 为第二可数的正则空间$\langle X,\tau\rangle$中闭的真子集，证明存在连续的 $f:X\to[0,1]$使当 $x\in F$ 时，$f(x)=0$，$x\notin F$ 时，$f(x)>0$(我们先承认第二可数的正则空间是正规空间这一结论(A4.4.4)).

4.2.6 试用 Urysohon 引理的条件，证明度量空间总是正规的.

4.2.7 证明：如果对于 X 的任一闭子空间 F 上的每个连续映射 $f: F\to[0,1]$ 都有一个连续的扩张 $g: X\to[0,1]$（即 g 连续且 $g|_F=f$），则 X 是正规的（Tietze 扩张定理的逆）.

4.2.8 设 F 为正规空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的闭子空间. 证明对任一连续映射 $f: F\to[0,1]^n$（或 $f: F\to E^n$），其中 n 为自然数，总存在连续映射 $g: X\to[0,1]^n$（或 $g: X\to E^n$）使 $g|_F=f$.

§4.3 紧性

A 内容提要

4.3.1 定义 如果 X 的任一开覆盖（相应地，可数开覆盖）都有有限子覆盖，则说 X 是紧致的（相应地，可数紧的）. 如果 X 的子集 S 作为子空间是紧致的（相应地，可数紧的），则说 S 是紧致（可数紧）子集.

S 是 X 的紧致（可数紧）子集 $\Leftrightarrow S$ 在 X 中的任一开覆盖（可数开覆盖）都有有限子覆盖.

易见，Lindelöf + 可数紧 $\Leftrightarrow$ 紧致.

4.3.2 定理 设 $\mathscr{S},\mathscr{B}$ 分别为 $\langle X,\tau\rangle$ 的子基与基. 则下述条件等价：

(1) X 紧致.

(2) 由 $\mathscr{B}$ 的成员构成的任一开覆盖都有有限子覆盖.

(3) 由 $\mathscr{S}$ 的成员构成的任一开覆盖都有有限子覆盖.

(4) X 的每个超滤子都收敛.

(5) X 的每个滤子 $\mathscr{F}$ 都有一个收敛滤子 $\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$.

(6) X 的每个网都有收敛的子网.

(7) X 的每个网都至少有一个接触点.

(8) X 的每个滤子都至少有一个接触点.

(9) X 的每个具有有限交性质的闭集族 $\mathscr{A}$，总有非空的交，即 $\bigcap\mathscr{A}\neq\varnothing$.

4.3.3 例 序完备的全序集 X，取序拓扑 τ，则 X 的每个闭区间 $[a,b]$ 都是紧致的. 特别地，E^1 的闭区间 $[a,b]$，序数空间 $[0,\Omega]$ 都是紧致的.

4.3.4 定义 如果 X 的每个无限子集都有聚点，则称 X 具有 Bolzano-Weierstrass 性质（简称 B-W 性质），如果 X 的每个序列都有收敛的子序列，则称 X 是序列紧的.（注 有的著作也将 B-W 性质叫做可数紧的或列紧的，读者在阅读不同著作时应加注意）.

4.3.5 定理 (1) 拓扑空间的紧致性，可数紧性，序列紧性，B-W 性质都对闭子空间是遗传的.

(2) 拓扑空间的紧致性，可数紧性，序列紧性都能被连续映射保持.

4.3.6 定理 下述条件是等价的：

(1) X 可数紧.

(2) X 的每个无限子集都有 ω-聚点.

(3) X 的每个序列都有接触点.

(4) 由 X 的非空闭集构成的渐缩序列 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$,有非空的交,即 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

(5) X 的任一具有有限交性质的闭集的可数族有非空的交.

4.3.7 定理　X 的诸种紧性间有下述关系:

(1) 紧致$\Rightarrow$可数紧$\Rightarrow$B-W 性质.

(2) 序列紧$\Rightarrow$可数紧.

(3) 如果 X 是 T_1 的,则可数紧$\Leftrightarrow$B-W 性质.

(4) 如果 X 是第一可数的,则序列紧$\Leftrightarrow$可数紧.

(5) 如果 X 是第二可数的,则序列紧$\Leftrightarrow$可数紧$\Leftrightarrow$紧致.

(6) 如果 X 是第二可数的,T_1 的,则紧致,序列紧,可数紧,B-W 性质都等价.

B　例题

紧性是拓扑学中的重要概念,在其它学科中有广泛应用. 对于本节介绍的四种紧性的特征性质以及它们彼此间的区别与联系都应十分熟悉,牢牢掌握. 这样在解题时,才能灵活运用.

4.3.1　证明积空间 $X\times Y$ 紧致$\Leftrightarrow X,Y$ 都紧致.

证　"$\Rightarrow$"　因为投影 p_1,p_2 都是连续的满映射,所以由 $X\times Y$ 紧致即得 X,Y 都紧致.

"$\Leftarrow$"　[法一]　由于

$$\mathscr{S} = \{p_1^{-1}(U) \mid U \in \tau_X\} \cup \{p_2^{-1}(V) \mid V \in \tau_Y\}$$

是 $X\times Y$ 的拓扑子基. 假定

$$\mathscr{G} = \{p_1^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in A\} \cup \{p_2^{-1}(V_\beta) \mid \beta \in B\}$$

是由 $\mathscr{S}$ 的成员构成的 $X\times Y$ 的任一开覆盖. 则

或者 $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 覆盖 X,或者 $\{V_\beta \mid \beta\in B\}$ 覆盖 Y. 不妨假定 $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 覆盖 X,由 X 的紧致性,它有有限子覆盖,记作 $\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots,U_{\alpha_n}\}$,则相应地

$$\{p_1^{-1}(U_{\alpha_1}), p_1^{-1}(U_{\alpha_2}), \cdots, p_1^{-1}(U_{\alpha_n})\}$$

是 $X\times Y$ 的开覆盖 $\mathscr{G}$ 的有限子覆盖. 所以 $X\times Y$ 紧致.

[法二]　设 $\mathscr{F}$ 为 $X\times Y$ 的超滤子,则 $p_1^*(\mathscr{F}), p_2^*(\mathscr{F})$ 分别为 X,Y 的超滤子(C3.2.5(3)). 由 X,Y 的紧致性,$\exists\ x\in \mathrm{Lim}_X p_1^*(\mathscr{F})$,$\exists\ y\in \mathrm{Lim}_Y p_2^*(\mathscr{F})$,则 $\langle x,y\rangle \in \mathrm{Lim}_{X\times Y}\mathscr{F}$. 所以 $X\times Y$ 紧致.

注　上述两种方法所选用的与紧致性等价的条件,在证明彼此等价的过程中都直接或间接地用到选择公理(不管是哪一本教科书中都如此). 所以上述两种方法也就间接地用到了选择公理. 将来在证明任意乘积的 Tychonoff 定理时,也就是这两种方法或者采用与超滤子相当的等价条件:

"X 紧致$\Leftrightarrow X$ 的每个万有网都收敛".

不过对于这里的有限乘积我们可以采用 A4.3.2 中的等价条件(2)来证明,这可以避免

选择公理，并且对于类似的问题（如 C4.3.10）也有示范作用．

［法三］ 其基本思想就好像用许多规格不等的矩形瓦片覆盖在屋顶上，然后断定只需要其中的有限多片就能覆盖了．首先逐“行”考察，每一“行”只需有限片，然而为了考察需要多少“行”，必须把同一“行”的规格不等的瓦片的宽度统一起来，相当于这一“行”中选中的瓦片的底边取交，然后以此为标准就可断定只需有限“行”就够了．这就完成了证明．现正式叙述如下：

设 $\mathscr{G}=\{U_\lambda\times V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是由 $X\times Y$ 的定义基的成员组成的任一开覆盖，其中$\forall\ \lambda, U_\lambda\in\tau_X$，$V_\lambda\in\tau_Y$. 显然 $\mathscr{G}$ 也是$\{x\}\times Y$ 在 $X\times Y$ 中的开覆盖，而$\{x\}\times Y$ 作为子空间与 Y 同胚，所以是紧致的，从而存在 $\mathscr{G}$ 的一个有限子覆盖

$$\{U_{\lambda_i(x)}\times V_{\lambda_i(x)}\mid i=1,2,\cdots,n(x)\}.$$

不妨假设其中每个成员都与$\{x\}\times Y$ 相交（否则，删除）. 令

$$U(x)=\bigcap_{i=1}^{n(x)}U_{\lambda_i(x)},$$

则 $U(x)$是包含 x 的开集，且

$$\{U(x)\times V_{\lambda_i(x)}\mid i=1,2,\cdots,n(x)\}$$

仍然覆盖$\{x\}\times Y$.

对每个 $x\in X$ 都这样做，得$\{U(x)\mid x\in X\}$是 X 的开覆盖，由 X 的紧致性，它有有限子覆盖$\{U(x_j)\mid j=1,2,\cdots k\}$. 于是

$$\{U(x_j)\times V_{\lambda_i(x_j)}\mid j=1,2,\cdots,k;\ i=1,2,\cdots,n(x_j)\}$$

覆盖 $X\times Y$（注意：至此尚未最后完成，虽然它覆盖 $X\times Y$，但还不是原先给出的覆盖 $\mathscr{G}$ 的子覆盖）. 又因对每个 i,j, $U(x_j)\times V_{\lambda_i(x_j)}\subset U_{\lambda_i(x_j)}\times V_{\lambda_i(x_j)}$，故

$$\{U_{\lambda_i(x_j)}\times V_{\lambda_i(x_j)}\mid j=1,2,\cdots,k;\ i=1,2,\cdots,n(x_j)\}$$

是 $X\times Y$ 的开覆盖 $\mathscr{G}$ 的有限子覆盖．所以 $X\times Y$ 紧致． □

注 由这一结果可知 E^2 中的非空子集 A 紧致$\Leftrightarrow A$ 是有界闭集．

4.3.2（Dini 定理） 设$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$是由紧致空间 X 到 E^1 的连续映射序列，如果满足下述条件：

(1) 存在 $f: X\to E^1$ 连续，使$\forall\ x\in X$，$\langle f_n(x)\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛于 $f(x)$.

(2) $\forall\ n\in\mathbf{N}$ 及$\forall\ x\in X$，$f_{n+1}(x)\geqslant f_n(x)$.

证明：$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$一致收敛于 f（即$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\geqslant n_0$ 以及$\forall\ x\in X$,

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon).$$

证 首先，由条件(1)$\forall\ \varepsilon>0$，$\forall\ x\in X\ \exists\ n(x)\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\geqslant n(x)$

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

且$\exists\ U_x\in\mathscr{N}(x)\cap\tau_X$ s.t. $\forall\ x'\in U_x$

$$|f_{n(x)}(x')-f_{n(x)}(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是$\forall\ x'\in U_x$

$$|f(x')-f_{n(x)}(x')|\leqslant|f(x')-f(x)|+|f(x)-f_{n(x)}(x)|+|f_{n(x)}(x)-f_{n(x)}(x')|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由于$\{U_x\mid x\in X\}$是紧致空间 X 的开覆盖，故$\exists\ \{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subset X$ s.t. $\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_{x_i}=X$. 令

$$n_0=\max\{n(x_1),n(x_2),\cdots,n(x_k)\},$$

则$\forall\ n\geqslant n_0$ 以及$\forall\ x'\in X\ \exists\ x_i$ s.t. $x'\in U_{x_i}$. 于是

$$0\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant f(x')-f_{n_0}(x')\leqslant f(x')-f_{n(x_i)}(x')<\varepsilon,$$

所以

$$|f(x')-f_n(x')|<\varepsilon.$$

这就证明了$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$一致收敛于 f. □

4.3.3 设$\langle X,\tau\rangle$为 T_1 空间，证明下述条件等价：

(1) X 可数紧.

(2) X 的每个局部有限的子集族(B1.2.4)是有限的.

(3) X 的每个局部有限的单点集族是有限的.

(4) X 的每个无限开覆盖都有一个真子覆盖.

证 (1)⇒(2) 设 $\mathscr{A}$ 为 X 的一个局部有限的子集族，但 $\mathscr{A}$ 无限，任取$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathscr{A}$，其中$\forall\ n\in\mathbf{N},A_n\neq\varnothing$，且当 $m\neq n$ 时 $A_n\neq A_m$. $\forall\ n\in\mathbf{N}$，令 $F_n=\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}\overline{A}_i$，则由 B1.2.4 知 $F_n=\overline{\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}A_i}\neq\varnothing$，故 F_n 闭于 X. 且

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$$

由(1)得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$. 取 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，由 $\mathscr{A}$ 局部有限，故$\exists\ U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ 及有限集 $\mathbf{N}_0\subset\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\in\mathbf{N}-\mathbf{N}_0$

$$U\cap A_n=\varnothing,\text{从而}\ U\cap\overline{A}_n=\varnothing.$$

现设 $n_0=\max\mathbf{N}_0$(若 $\mathbf{N}_0=\varnothing$，则可任取 $n_0\in\mathbf{N}$)，则

$$U\cap F_{n_0+1}=U\cap\left(\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty}\overline{A}_i\right)=\bigcup_{i=n_0+1}^{\infty}(U\cap\overline{A}_i)=\varnothing,$$

这与 $x\in U\cap F_{n_0+1}$矛盾. 所以 $\mathscr{A}$ 是有限的.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 假定 X 有一个开覆盖 $\mathscr{G}$，它没有真子覆盖. 我们设法构造一个局部有限的单点集族，而它是无限的.

据假定$\forall\ G\in\mathscr{G},\bigcup(\mathscr{G}-\{G\})\neq X$，故$\exists\ x\in X$ s.t. $x\in G$ 且$\forall\ G^*\in\mathscr{G}-\{G\}$有 $x\notin G^*$.

由于 $\mathscr{G}$ 是无限的，故存在可数无限的真子族，记为 $\mathscr{G}_0=\{G_1,\cdots,G_n,\cdots\}\subset\mathscr{G}$. 则$\forall\ n\in\mathbf{N}$ $\exists\ x_n\in G_n$ s.t. $\forall\ G\in\mathscr{G}-\{G_n\},x_n\notin G$. 令

$$\mathscr{A}=\{\{x_n\}\mid n\in\mathbf{N}\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是局部有限的单点集族，但 $\mathscr{A}$ 本身无限，与(3)矛盾. 所以(4)成立.

(4)⇒(1) 若 X 不是可数紧的，由于 X 是 T_1 的，故 X 有一个无限子集 A 没有聚点，

则 $\mathscr{C}A\in\tau$. 不妨假设 $\mathscr{C}A\neq\varnothing$（否则可用 A 的一个无限的真子集替代 A）. 取定 $x\in\mathscr{C}A$，由于 A 无聚点且 X 是 T_1 的，故 $\forall\ a\in A\ \exists\ U(a)\in\mathscr{N}(a)\cap\tau$ s.t. $x\notin U(a)$ 且

$$U(a)\cap(A-\{a\})=\varnothing,$$

从而

$$\mathscr{U}=\{U(a)\mid a\in A\}\cup\{\mathscr{C}A\}$$

是 X 的一个无限开覆盖，但无真子覆盖，与(4)矛盾，所以 X 是可数紧的. □

4.3.4　设 $\langle X,\tau\rangle$ 是第一可数的. 证明 F 闭于 $X\Leftrightarrow$ 对 X 的每个紧致子集 C，$F\cap C$ 闭于 C.

证　只需证充分性. $\forall\ x\in \mathrm{Cl}_X F$，由第一可数性知存在 F 中的序列 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 收敛于 x，令 $C=\{x\}\cup\{x_n\mid n\in\mathbf{N}\}$. 则 C 为 X 的紧致子集. 事实上，设 $\mathscr{C}$ 为 C 在 X 中的开覆盖，则 $\exists\ G\in\mathscr{C}$ s.t. $x\in G$，又因 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 收敛到 x，故 $\exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\geqslant n_0, x_n\in G$. 从而 $\exists\ \{G_1,G_2,\cdots,G_{n_0}\}\subset\mathscr{C}$ s.t. $\forall\ i\leqslant n_0, x_i\in G_i$. 于是 $\{G,G_1,G_2,\cdots,G_{n_0}\}$ 也覆盖 C，故 C 紧致. 从而 $F\cap C$ 闭于 C. 又 $\forall\ n, x_n\in F\cap C$，故 $x\in \mathrm{Cl}_C(F\cap C)=F\cap C$，从而 $x\in F$，这就证明了 F 闭于 X. □

4.3.5　举例说明 B-W 性质未必能被连续映射保持.

解　设 $\langle\mathbf{N},\tau\rangle$ 是奇偶拓扑空间，$\mathscr{B}=\{\{2n-1,2n\}\mid n\in\mathbf{N}\}$ 是它的基. 又设 $\langle\mathbf{N},\tau_D\rangle$ 是离散空间. 定义 $f:\langle\mathbf{N},\tau\rangle\to\langle\mathbf{N},\tau_D\rangle$ 为 $\forall\ n\in\mathbf{N}$,

$$f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

其中$[\cdot]$为取整函数，即$[x]=$不超过 x 的最大整数. 易见 f 是连续的（因为每个单点集的原像是 τ-开集），又 $\langle\mathbf{N},\tau\rangle$ 的每个非空子集 A，当 $2k-1\in A$ 时，$2k\in A'$；当 $2k\in A$，$2k-1\in A'$. 总之 $A'\neq\varnothing$. 所以 $\langle\mathbf{N},\tau\rangle$ 具有 B-W 性质，但 $\langle\mathbf{N},\tau_D\rangle$ 却没有 B-W 性质. □

4.3.6　设 X 为全序集并取序拓扑 τ，证明 X 是序完备的 $\Leftrightarrow\langle X,\tau\rangle$ 的每个闭区间 $[a,b]=\{x\in X\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 都是紧致的.

证　"$\Rightarrow$"　不妨假设 $a<b$. 设 $\mathscr{G}=\{[a,\alpha)\mid\alpha\in A\}\cup\{(\beta,b]\mid\beta\in B\}$ 为 $[a,b]$ 的任一由子基元组成的覆盖（注 $[a,b]$ 的子空间拓扑与本身的序拓扑一致）. 其中 $A,B\subset[a,b]$. 显然 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$. 由序完备性可设 $\alpha_0=\sup A$，$\beta_0=\inf B$. 由于 $\forall\ \beta\in B,\beta_0\leqslant\beta$，故 $\exists\ \alpha\in A$ s.t. $\beta_0\in[a,\alpha)$. 于是 $\beta_0<\alpha\leqslant\alpha_0$. 据此，再由 α_0,β_0 的定义，$\exists\ \alpha_1\in A,\beta_1\in B$ s.t. $\beta_0\leqslant\beta_1<\alpha_1\leqslant\alpha_0$，于是 $\{[a,\alpha_1),(\beta_1,b]\}$ 就是 $\mathscr{G}$ 的一个有限子覆盖，所以 $[a,b]$ 紧致.

"$\Leftarrow$"　假定 X 有一个非空子集 A 有上界但无上确界. 于是 A 无最大元，取定 $a\in A$. 设 B 为 A 的上界的集合，则 $B\neq\varnothing$，据假定 B 无最小元，取定 $b\in B$.

考察区间 $[a,b]$，易见 $\{[a,a'),,(b',b]\mid a'\in A,b'\in B$ 且 $a'>a,b'<b\}$ 构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖，但无有限子覆盖，与 $[a,b]$ 的紧致性矛盾. 所以 X 是序完备的. □

注　E^1 作为特例，可见 E^1 的任何一个闭区间都紧致恰好等价于实数集合的序完备性.

C　练习题

4.3.1　证明下述命题：

(1) 如果 $\langle X,\tau\rangle$ 是紧致的，τ' 也是 X 的拓扑且 $\tau'\subset\tau$，则 $\langle X,\tau'\rangle$ 也紧致.

(2) X 中有限多个紧致子集之并也紧致.

(3) E^n 中任一开球 $B(x,\varepsilon)$都不是紧致的.

4.3.2 证明 Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$ 不是可数紧的,$\mathbf{R}_S$ 的子空间$[0,1]$也不是可数紧的,甚至不具有 B-W 性质.

4.3.3 设 $X=E^1\times\{0,1\}$,其中$\{0,1\}$取平凡拓扑,X 为积空间.

$$A=((0,1]\times\{0\})\cup\{\langle 0,1\rangle\},B=([0,1)\times\{0\})\cup\{\langle 1,1\rangle\}.$$

证明 A,B 都是 X 的紧致子集,但 $A\cap B$ 却不是紧致的.

4.3.4 设 $P=\mathbf{R}\times(0,+\infty)$,$L=\mathbf{R}\times\{0\}$,$X=P\cup L$. $\forall\ x=\langle x_1,x_2\rangle\in X$ 令

$$\mathscr{B}(x)=\begin{cases}\{B(x,\varepsilon)\mid 0<\varepsilon<x_2\} & x\in P,\\ \{B(\langle x_1,r\rangle,r)\cup\{x\}\mid r>0\} & x\in L.\end{cases}$$

为相应点 x 处的开邻域基生成一个拓扑,称之为切盘拓扑,其中 $B(x,\varepsilon)$,$B(\langle x_1,r\rangle,r)$都是 E^2 中的开球.$x\in L$ 时,$\mathscr{B}(x)$的成员恰好在 x 处与 L 相切,证明切盘拓扑空间不是可数紧的.

4.3.5 (1) 不可数集 X,取可数补拓扑 τ,证明$\langle X,\tau\rangle$没有 B-W 性质.

(2) 无限集 X,取有限补拓扑 τ,证明$\langle X,\tau\rangle$是序列紧的.

4.3.6 设$\langle X,\tau\rangle$为 T_1 空间,证明:X 是可数紧的$\Leftrightarrow X$ 的每个可数的闭子空间是紧致的.

4.3.7 设 X 为多于一点的平凡空间,$\mathbf{N}$ 取离散拓扑,证明积空间 $X\times\mathbf{N}$ 具有 B-W 性质,但不是可数紧的.

4.3.8 证明 Frot 空间既是紧致的,也是序列紧的.

4.3.9 设$\langle X,\tau\rangle$是第一可数的,证明 $G\in\tau\Leftrightarrow$对 X 的每个紧致子集 C,$G\cap C$ 开于 C.

4.3.10 证明 Lindelöf 空间 X 与紧致空间 Y 的积空间是 Lindelöf 的.

4.3.11 证明序列紧空间 X 与可数紧空间 Y 的积空间 $X\times Y$ 是可数紧的.

4.3.12 设$\langle X,\tau\rangle$不是紧致的,则 $\mathscr{S}=\{\mathscr{C}C\mid C$ 为 X 的紧致子集$\}$具有有限交性质,生成一个滤子 $\mathscr{F}$. 证明 $\mathrm{Adh}\mathscr{F}=\{x\in X\mid\forall\ U\in\mathscr{N}(x),U$ 非紧致$\}$.

§4.4 紧性与分离性的关系

A 内容提要

4.4.1 定理 (1)Hausdorff 空间的紧致子集是闭集;

(2) 紧致 Hausdorff 空间是 T_4 空间;

(3) 由紧致空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的连续的一一映射 $f:X\to Y$ 是同胚映射.

4.4.2 定理 设 A 为正则空间$\langle X,\tau\rangle$的紧致子集.

(1) 若 B 为与 A 不相交的闭集,则$\exists\ U,V\in\tau$, s.t. $A\subset U$,$B\subset V$,且 $U\cap V=\varnothing$.

(2) 若 $A\subset U$ 且 $U\in\tau$,则$\exists\ V\in\tau$ s.t. $A\subset V\subset\bar{V}\subset U$.

4.4.3 **定理** 设 X 为完全正则空间,$A,B\subset X$,其中 A 紧致,B 为闭集,且 $A\cap B=\varnothing$. 则存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(A)=\{0\}$,$f(B)\subset\{1$

4.4.4 **定理** Lindelöf 的正则空间是正规空间.

B 例题

A4.4.1,4.4.4 定理的证明方法(可参见有关的教科书,如[1]),都是很典型的,要好好领会.A 中给出的定理都是很有用的结果,要善于运用.

4.4.1 设 X 为紧致 Hausdorff 空间,$\mathscr{A}$ 是 X 的闭连通子集族,$C=\bigcap\mathscr{A}\neq\varnothing$,$\mathscr{A}$ 在关系"$\subset$"之下是全序的,证明 C 连通.

证 设$\{D,E\}$是 C 的一个分解.因 D,E 闭于 C,而 C 又闭于 X,故 D,E 也闭于 X,且 $D\cap E=\varnothing$. 由于 X 是紧致 Hausdorff 的.所以是正规的.因此$\exists\ U,V$ 开于 X s.t. $U\cap V=\varnothing$且 $D\subset U$,$E\subset V$,这表明 U 和 V 都含有 C 的点,所以$\forall\ A\in\mathscr{A}$,$A\cap U\neq\varnothing$,$A\cap V\neq\varnothing$. 由于 A 连通,故 $A\not\subset U\cup V$. 即 $A\cap\mathscr{C}(U\cup V)\neq\varnothing$,所以

$$\mathscr{B}=\{A\cap\mathscr{C}(U\cup V)\mid A\in\mathscr{A}\}$$

是 X 的一族非空闭集.由于 $\mathscr{A}$ 是全序的,所以 $\mathscr{B}$ 的任意有限个成员之交仍是 $\mathscr{B}$ 中的元,即 $\mathscr{B}$ 具有有限交性质.于是由 X 的紧致性得

$$\bigcap\mathscr{B}\neq\varnothing,\text{即}\ C\cap\mathscr{C}(U\cup V)\neq\varnothing.$$

这与 $C=D\cup E\subset U\cup V$ 矛盾.这就证明了 C 连通. □

注 这一道题的综合性较强,读者可仔细体会一下.

4.4.2 设

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$$

是 Hausdorff 空间 X 的(非空)紧致子集的渐缩序列,U 开于 X,且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\subset U$. 证明$\exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n>n_0$,$F_n\subset U$.

证 首先,由$\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$的渐缩性,可知上述结论与$\exists\ n\in\mathbf{N}$ s.t. $F_n\subset U$ 等价.现在我们用反证法.设$\forall\ n\in\mathbf{N}$,$F_n\cap\mathscr{C}U\neq\varnothing$. 由于 F_n,$\mathscr{C}U$ 均闭于 X,所以 $F_n\cap\mathscr{C}U$ 闭于 X,从而也闭于 F_1,而 F_1 是紧致的,$\{F_n\cap\mathscr{C}U\}_{n\in\mathbf{N}}$是 F_1 的非空闭集的渐缩序列,所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n\cap\mathscr{C}U)\neq\varnothing.$$

即$(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n)\cap\mathscr{C}U\neq\varnothing$,这与$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\subset U$ 矛盾.从而命题得证. □

4.4.3 (1) 设$\langle X,\tau\rangle$是自稠密的(即 $X'=X$)Hausdorff 空间.证明:$\forall\ U\in\tau-\{\varnothing\}$以及$\forall\ x\in X$,$\exists\ V\in\tau-\{\varnothing\}$ s.t. $V\subset U$ 且 $x\notin\bar{V}$.

(2) 如果 X 是自稠密的,Hausdorff 的,又是紧致的.证明:任一映射 $f:\mathbf{N}\to X$ 都不是满射,从而 X 不可数.

(3) 证明:E^1 的任一闭区间$[a,b]$($a<b$)是不可数的.

证 (1) 若 $x\in U$,由于 $x\in X'$,故有 $U\cap(X-\{x\})\neq\varnothing$. 所以$\exists\ y\in U$ s.t. $y\neq x$.

若 $x\notin U$，因 $U\neq\varnothing$，故 $\exists\ y\in U$ s. t. $y\neq x$. 总之，$\exists\ y\in U$ s. t. $y\neq x$. 由 Hausdorff 性质，$\exists\ W_1,W_2\in\tau$ s. t. $x\in W_1,y\in W_2$ 且 $W_1\cap W_2=\varnothing$. 令 $V=U\cap W_2$，则 $y\in V,V\in\tau,V\subset U$. 又 $W_1\cap V\subset W_1\cap W_2=\varnothing$，所以 $x\notin\overline{V}$.

(2) $\forall\ n\in\mathbf{N}$，记 $x_n=f(n)$. 我们用归纳法构造 $V_n\in\tau$ 使 $\langle\overline{V}_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 为 X 的非空闭集的渐缩序列，且 $\forall\ n\in\mathbf{N},x_n\notin\overline{V}_n$.

当 $n=1$ 时，对于 x_1 与 $U=X$，由(1) $\exists\ V_1\in\tau-\{\varnothing\}$，s. t. $V_1\subset U=X$ 且 $x_1\notin\overline{V}_1$.

假定 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 已作出，且 $\forall\ n\leqslant k,V_n\in\tau-\{\varnothing\},x_n\notin\overline{V}_n,V_{n+1}\subset V_n(n\leqslant k-1)$.

于是对于 x_{n+1} 与 $V_k\in\tau-\{\varnothing\}$，由(1) $\exists\ V_{k+1}\in\tau-\{\varnothing\}$ s. t. $x_{k+1}\notin\overline{V}_{k+1},V_{k+1}\subset V_k$.

由归纳原理得 $\langle\overline{V}_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 符合要求．现由 X 的紧致性(实际上可数紧就足矣)，$\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}\overline{V}_n\neq\varnothing$.

取 $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}\overline{V}_n$，因 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$x_n\notin\overline{V}_n$，故 $x\neq x_n$，即 $x\notin f(\mathbf{N})$，所以 f 不是满射．从而 X 不可数．

(3) 因 E^1 的区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 是紧致的，Hausdorff 的自稠密的．所以 $[a,b]$ 不可数．□

注　关于 $[a,b]$ 不可数的这一证明完全不用代数的方法，既不用十进制小数，也不用二进制小数，仅仅用到 E^1 的拓扑结构，而这个拓扑结构是由序结构导出的．

4.4.4　设 X 为可数无限集．令

$$\tau_X=\{G\subset X\mid p\notin G\text{ 或 }\mathscr{C}G\text{ 有限}\},p\in X\text{ 固定}.$$

$$\tau_{\mathbf{R}}=\{G\subset\mathbf{R}\mid q\notin G\text{ 或 }\mathscr{C}G\text{ 有限}\},q\in\mathbf{R}\text{ 固定}.$$

(实际上 $\langle X,\tau_X\rangle$，$\langle\mathbf{R},\tau_{\mathbf{R}}\rangle$ 都是 Fort 空间).

(1) 证明 $\langle X,\tau_X\rangle$，$\langle\mathbf{R},\tau_{\mathbf{R}}\rangle$ 都是紧致的，序列紧的，Hausdorff 的．

(2) 令 $Z=X\times\mathbf{R}$ 为积空间，证明 X 是正规的，但 Z 的子空间 $W=Z-\{\langle p,q\rangle\}$ 却不是正规的．

(3) 设 $A=(X-\{p\})\times\{q\}$，$B=\{p\}\times(\mathbf{R}-\{q\})$ 易见 A,B 为 Z 的两个不相交的闭集，定义

$$f:A\cup B\to[0,1],\ x\mapsto f(x)=\begin{cases}0 & x\in A,\\ 1 & x\in B.\end{cases}$$

证明 f 连续但不存在到 W 上的连续扩张，即对任意的连续映射 $g:W\to[0,1]$，都有 $g|_{A\cup B}\neq f$.

证　(1) 由 C4. 3. 8 已知 $\langle X,\tau_X\rangle$，$\langle\mathbf{R},\tau_{\mathbf{R}}\rangle$ 都是紧致的，序列紧的．又 $\forall\ x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$.

若 $x_1\neq p$ 且 $x_2\neq p$，则 $\{x_1\}\in\mathscr{N}_X(x_1)$，$\{x_2\}\in\mathscr{N}_X(x_2)$，$\{x_1\}\cap\{x_2\}=\varnothing$.

若 $x_1=p$，则 $X-\{x_2\}\in\mathscr{N}_X(x_1)$，$\{x_2\}\in\mathscr{N}_X(x_2)$，$(X-\{x_2\})\cap\{x_2\}=\varnothing$.

所以 $\langle X,\tau_X\rangle$ 是 Hausdorff 的．同理 $\langle\mathbf{R},\tau_{\mathbf{R}}\rangle$ 是 Hausdorff 的．

(2)　由(1)及 B4. 3. 1 知 Z 也是紧致的 Hausdorff 的，从而是正规的．

现设 U，V 分别为 W 的包含(3)所述的 A 与 B 的开集，且 $U\cap V=\varnothing$. 则存在 G,H 开于 Z 使

$$U=G\cap W,\quad V=H\cap W.$$

$\forall\ x\in X-\{p\}$，$\langle x,q\rangle\in A\subset U\subset G$，故 $\exists\ V_x\in\mathscr{N}_{\mathbf{R}}(q)\cap\tau_{\mathbf{R}}$ s. t. $\{x\}\times V_x\subset G$，且 $\mathbf{R}-V_x$ 有限．

令
$$C=\bigcup\{\mathbf{R}-V_x|x\in X-\{p\}\},$$
则 C 可数,故
$$\exists\ y_0\in\mathbf{R}-(C\cup\{q\})=(\bigcap\{V_x|x\in X-\{p\}\})\cap(\mathbf{R}-\{q\}).$$
一方面,$\forall\ x\in X-\{p\}$,$y_0\in V_x$,有
$$\langle x,y_0\rangle\in\{x\}\times V_x\subset G;\qquad(*)$$
另一方面,$\langle p,y_0\rangle\in B\subset V\subset H$,故$\exists\ N\in\mathscr{N}_X(p)\cap\tau_X$ s. t. $\langle p,y_0\rangle\in N\times\{y_0\}\subset H$,且 $X-N$ 有限,故
$$\exists\ x_0\in X-((X-N)\cup\{p\})=N\cap(X-\{p\}).\qquad(**)$$
于是由$(*)$ $\langle x_0,y_0\rangle\in G$,由$(**)$ $\langle x_0,y_0\rangle\in N\times\{y_0\}\subset H$. 所以,
$$\langle x_0,y_0\rangle\in G\cap H\cap W=U\cap V,$$
与 $U\cap V=\varnothing$矛盾. 从而 W 不是正规的.

(3) f 的连续性由粘合引理立刻可见.

假若存在 $g:W\to[0,1]$连续,使 $g|_{A\cup B}=f$,则
$$U\xlongequal{\text{def}}g^{-1}\left([0,\frac{1}{2})\right),\ V\xlongequal{\text{def}}g^{-1}\left((\frac{1}{2},1]\right)$$
开于 W 且 $A\subset U$,$B\subset V$,$U\cap V=\varnothing$,与(2)矛盾,所以 f 不存在到 W 的连续扩张. □

注　这道题一方面说明正规性不是遗传性质,同时还说明 Tietze 扩张定理的结果对于非正规空间不成立.

4.4.5　证明正则空间(X,τ)的紧致子集 A 的闭包 $\overline{A}$ 也紧致. 举例说明任意拓扑空间中紧致子集的闭包未必紧致.

证　[法一]　设$\mathscr{G}$为 $\overline{A}$ 在 X 中的任一开覆盖,则$\mathscr{G}$也是 A 在 X 中的开覆盖,故有有限子族$\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}\subset\mathscr{G}$使 $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$. 现证 $\overline{A}\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$. 假定$\exists\ x\in\overline{A}$但 $x\notin\bigcup_{i=1}^{n}G_i$,则 $x\in\mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)$. 因为 A 紧致,$\mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)$是 X 的闭子集,且 $A\cap\mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)=\varnothing$,则由 A. 4. 4. 2(1) $\exists\ U,V\in\tau$ s. t. $A\subset U$, $\mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\subset V$,$U\cap V=\varnothing$. 而 $V\in\mathscr{N}_X(x)$且 $V\cap A=\varnothing$与 $x\in\overline{A}$矛盾. 故有$\bigcup_{i=1}^{n}G_i\supset\overline{A}$. 于是 $\overline{A}$ 紧致.

[法二]　与[法一]同样地证 $\overline{A}\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$.

由于 A 紧致,由 A. 4. 4. 2(2) $\exists\ V\in\tau$ s. t. $A\subset V\subset\overline{V}\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$,于是 $\overline{A}\subset\overline{V}\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$.

[法三]　设$\mathscr{G}$为 $\overline{A}$ 在 X 中的开覆盖,$\forall\ x\in A\ \exists\ G_x\in\mathscr{G}$ s. t. $x\in G_x$. 由 X 的正则性,$\exists\ V_x\in\tau$ s. t. $x\in V_x\subset\overline{V}_x\subset G_x$,则$\{V_x|x\in A\}$是 A 在 X 中的开覆盖,由 A 紧致,存在$\{V_{x_1},V_{x_2},\cdots,V_{x_n}\}$使
$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}\subset\overline{\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{V}_{x_i}\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_{x_i}.$$
从而 $\overline{A}\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_{x_i}$. 所以$\{G_{x_1},G_{x_2},\cdots,G_{x_n}\}$就是 $\overline{A}$ 在 X 中的开覆盖$\mathscr{G}$的有限子覆盖. 故 $\overline{A}$ 紧致.

对于一般拓扑空间不成立的反例有：

(1) 无限的特殊点拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$，$p\in X$为特殊点．$\{p\}$是X的紧致子集，且$\overline{\{p\}}=X$，但X不是紧致的(由此可见X不是正则的).

(2) 右序拓扑空间$\mathbf{R}_{ro}$，$[a,b]$是$\mathbf{R}_{ro}$紧致子集，且$\overline{[a,b]}=(-\infty,b]$，易见$(-\infty,b]$在$\mathbf{R}_{ro}$中不是紧致的．□

4.4.6 证明多于一点的连通的T_3空间是不可数的．

证 假定X是多于一点的连通的T_3空间，如果X可数，则X是Liudelöf的，从而X是正规的T_1空间，因此由B4.2.6知X是不可数集，矛盾．所以X必为不可数集．□

4.4.7 设$\mathscr{E}$为由X到E^1的映射族，若$x\in X$使$\forall f\in\mathscr{E}$有$f(x)=0$，则称x为$\mathscr{E}$的公零点．记$\mathscr{C}(X,E^1)$为由X到E^1的全体连续映射组成的集合．现设$\langle X,\tau\rangle$是完全正则的，证明：X紧致$\Leftrightarrow\forall\mathscr{E}\subset\mathscr{C}(X,E^1)$，若$\mathscr{E}$的任一有限子集有公零点，则$\mathscr{E}$本身有公零点．

证 "$\Rightarrow$" 记$\mathscr{F}=\{f^{-1}(\{0\})\mid f\in\mathscr{E}\}$，据假设$\mathscr{E}$的任一有限子集有公零点，故$\mathscr{F}$为$X$的具有有限交性质的闭集族，由$X$的紧致性，立刻可得

$$\bigcap\{f^{-1}(\{0\})\mid f\in\mathscr{E}\}\neq\varnothing.$$

所以$\mathscr{E}$有公零点．

"$\Leftarrow$" 假定X不是紧致的，则存在X的具有有限交性质的闭集族$\mathscr{F}$使$\bigcap\mathscr{F}=\varnothing$．于是，$\forall x\in X\ \exists F_x\in\mathscr{F}$ s.t. $x\notin F_x$．再由完全正则性，$\exists f_x: X\to[0,1]$连续 s.t. $f_x(x)=0$，$f_x(F_x)=\{1\}$．令

$$g_x: X\to E^1,\ y\mapsto g_x(y)=1-f_x(y).$$

则

$$g_x\in\mathscr{C}(X,E^1)，且\ g_x(x)=1,g_x(F_x)=\{0\}.$$

由$\mathscr{F}$具有有限交性质可知映射族$\mathscr{E}=\{g_x\mid x\in X\}$的任一有限子族都有公零点．则据假设条件$\mathscr{E}$有公零点，记为$x_0$．于是$g_{x_0}(x_0)=0$导致矛盾．所以$X$紧致．□

4.4.8 证明X是正规的$\Leftrightarrow$对X的任一闭集F以及包含F的开集G，存在可数的开集族$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$使$F\subset\bigcup_{n\in\mathbf{N}}U_n$且$\forall n\in\mathbf{N}$，$\overline{U}_n\subset G$.

证 必要性显然，只需证充分性．

设F_1,F_2为X的一对不相交的闭集，不妨假定它们都非空．注意到$F_1\subset\mathscr{C}F_2$，$F_2\subset\mathscr{C}F_1$．由假设条件，存在可数开集族$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$及$\{V_n\}_{n\in\mathbf{N}}$使

$$F_1\subset\bigcup_{n\in\mathbf{N}}U_n,\ \forall n\in\mathbf{N},\ \overline{U}_n\subset\mathscr{C}F_2;$$

$$F_2\subset\bigcup_{n\in\mathbf{N}}V_n,\ \forall n\in\mathbf{N},\ \overline{V}_n\subset\mathscr{C}F_1.$$

令

$$U=\bigcup_{i\in\mathbf{N}}(U_i-\bigcup_{j\leqslant i}\overline{V}_j),\ V=\bigcup_{i\in\mathbf{N}}(V_i-\bigcup_{j\leqslant i}\overline{V}_j).$$

于是U,V为不相交的开集，且$F_1\subset U$，$F_2\subset V$，所以X是正规的．□

4.4.9(Wallace定理) 设A，B分别为X，Y的紧致子集，W为积空间$X\times Y$的包含$A\times B$的开集．证明$\exists\ U\in\tau_X$及$V\in\tau_Y$使

$$A\times B\subset U\times V\subset W.$$

证　先考虑 A 为单点集 $\{x\}$ 的情形(称为管形引理). $\forall\ y\in B\ \exists\ U_y\in\mathscr{V}_X(x)\cap\tau_X$ 以及 $V_y\in\tau_Y$ s.t. $\langle x,y\rangle\in U_y\times V_y\subset W$. 于是

$$\mathscr{V}=\{V_y\mid y\in B\}$$

是 B 在 Y 中的开覆盖,由 B 紧致,$\exists\ \{V_{y_1},V_{y_2},\cdots,V_{y_n}\}\subset\mathscr{V}$ s.t. $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{y_i}$. 令

$$V_x=\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i},\qquad U_x=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}.$$

则 $U_x\in\tau_X$, $V_x\in\tau_Y$ 且

$$\{x\}\times B\subset U_x\times V_x\subset W.$$

进而 $\forall\ x\in A$ 都存在如上所述的 U_x,V_x. 于是

$$\mathscr{U}=\{U_x\mid x\in A\}$$

是 A 在 X 中的开覆盖,由 A 紧致,$\exists\ \{U_{x_1},U_{x_2},\cdots,U_{x_m}\}\subset\mathscr{U}$ s.t. $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_{x_i}$, 令

$$U=\bigcup_{i=1}^{m}U_{x_i},\ V=\bigcap_{i=1}^{m}V_{x_i},$$

则 U,V 合所求. □

注　这一道题从内容的系统上讲可列入上一节. 不过从证明方法上看是与本节的许多结果所用的方法雷同. 这是一个有名的定理,当 $A=\{x\}$ 时,也叫管形引理. 处理积空间中的问题时很有用,应注意这个定理中,A,B 的紧致性条件是起决定性作用的,如果有一个不是紧致的,则结论未必成立,例如在 $E^2=E^1\times E^1$ 中,$W=\{\langle x,y\rangle\mid -\frac{1}{x}<y<\frac{1}{x},x>0\}$ 是包含 $(0,+\infty)\times\{0\}$ 的开集,就不存在 U,V 开于 E^1 使 $(0,+\infty)\times\{0\}\subset U\times V\subset W$ 成立. 原因就是其中的 $A=(0,+\infty)$ 不是紧致的.

4.4.10　(1)　证明:如果 Y 为紧致空间,则投影 $p_1: X\times Y\to X$ 是闭映射. 其中 $X\times Y$ 为积空间.

(2) 设 $f: X\to Y$, Y 是紧致空间. 证明:如果 f 是积空间的闭子集,则 f 连续.

证　(1)　设 F 闭于 $X\times Y$. 要证 $p_1(F)$ 闭于 X.

设 $x\in\mathscr{C}p_1(F)$, 则 $\forall\ y\in Y$, $\langle x,y\rangle\notin F$, 即 $\{x\}\times Y\subset\mathscr{C}F$, 因 Y 紧致,于是由管形引理, $\exists\ U\in\tau_X$ s.t.

$$\{x\}\times Y\subset U\times Y\subset\mathscr{C}F.$$

而 $p_1(U\times Y)=U$ 开于 X 且

$$x\in U=p_1(U\times Y)\subset\mathscr{C}p_1(F).$$

最后的包含关系是因为:如果 $x_1\in p_1(F)$, 则 $\exists\ y\in Y$ s.t. $\langle x_1,y\rangle\in F$. 于是 $\langle x_1,y\rangle\notin U\times Y$, 故 $x_1\notin U$, 从而 $x_1\notin p_1(U\times Y)$. 这就表明 $p_1(U\times Y)\subset\mathscr{C}p_1(F)$. 由此可知 $\mathscr{C}p_1(F)$ 开于 X, 即 $p_1(F)$ 闭于 X. p_1 为闭映射.

(2)　注意到 $f\subset X\times Y$ 就是映射 f 的图. 容易验证:对于 Y 的任一闭集 F

$$f^{-1}(F)=p_1((X\times F)\cap f).$$

由于 $X\times F$, f 都是 $X\times Y$ 的闭集, 由(1) p_1 又是闭映射, 所以 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集, 从而 f 连续. □

注　我们已知投影是开映射,一般地不是闭映射. 这里(1)给出了投影是闭映射的一个

充分条件．C4.1.6告诉我们：当 Y 是Hausdorff空间时，如果 $f: X \to Y$ 连续，则 f 是积空间的闭子集．现在例中的(2)在 Y 是紧致空间的前题下，给出了一个与此相"逆"的命题．

4.4.11　设 C 为 E^n 中有界的闭的凸集(B1.1.11)且 $\mathrm{Int}_{E^n}C \neq \varnothing$．证明：作为 E^n 的子空间 C 与 E^n 的单位闭球体 $D^n = \{x \in E^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ 同胚．

证　不妨假设原点 $O \in \mathrm{Int}_{E^n}C$，且 $D^n \subset C$. 如果定义映射 $p: E^n \to E^1$：$\forall x \in E^n$，令

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

(1) 先证 p 满足：$\forall x, y \in E^n$

(i) $p(x) \geqslant 0$，且当 $x \neq 0$ 时，$p(x) > 0$.

(ii) $\forall t \geqslant 0$, $p(tx) = tp(x)$.

(iii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

(i)，(ii)是明显的，只需证(iii). $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \alpha, \beta > 0$, s.t.

$$p(x) \leqslant \alpha < p(x) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{x}{\alpha} \in C,$$

$$p(y) \leqslant \beta < p(y) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{y}{\beta} \in C.$$

于是，

$$p(x) + p(y) \leqslant \alpha + \beta < p(x) + p(y) + \varepsilon.$$

由于 C 是凸集，故

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{\beta} \in C.$$

因此

$$p(x+y) \leqslant \alpha + \beta < p(x) + p(y) + \varepsilon.$$

证 $\varepsilon \to 0$ 得

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

(2) 再证 C 可表示为

$$C = \{x \in E^n \mid p(x) \leqslant 1\},$$

且 p 连续．

事实上，$\forall x \in C$，由 $\frac{x}{1} \in C$ 可知 $p(x) \leqslant 1$. 反过来，当 $p(x) = 0$ 时，$x = O \in C$，当 $0 < p(x) \leqslant 1$ 时，$\forall \delta > 0$ $\exists \alpha > 0$, s.t. $\frac{x}{\alpha} \in C$ 且 $p(x) \leqslant \alpha < p(x) + \delta$.

现在，$\forall \varepsilon > 0$，只要取 $\delta = p^2(x) \cdot \varepsilon / \|x\|$．就有

$$\left\| \frac{x}{p(x)} - \frac{x}{\alpha} \right\| < \left\| \frac{x}{p(x) \cdot \alpha} \right\| \delta \leqslant \frac{\|x\|}{p^2(x)} \delta = \varepsilon.$$

由于 C 为 E^n 的闭集，$\frac{x}{\alpha} \in C$，所以 $\frac{x}{p(x)} \in C$.

再由 C 是凸集，$O \in C$，$0 < p(x) \leqslant 1$，得

$$x = (1 - p(x))O + p(x) \cdot \frac{x}{p(x)} \in C.$$

因此

$$C = \{x \in E^n \mid p(x) \leqslant 1\}.$$

现当 $x \neq O$ 时，$\frac{x}{\|x\|} \in D^n \subset C$，故有 $p(\frac{x}{\|x\|}) \leqslant 1$，从而

$$p(x) \leqslant \|x\|.$$

由于

$$p(x) = p(x - y + y) \leqslant p(x - y) + p(y),$$
$$p(x) - p(y) \leqslant p(x - y),$$

同理

$$p(y) - p(x) \leqslant p(y - x)$$

故得 $\forall\, x, y \in E^n$，

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \max\{p(x - y), p(y - x)\} \leqslant \|x - y\|,$$

从而 p 连续．

(3) 令 $f: C \to D^n$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p(x)}{\|x\|}x & x \neq O, \\ O & x = O. \end{cases}$$

则易见在 $x \neq O$ 处 f 连续．在 $x = O$ 处，$\forall\, \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，则当 $\|x - O\| < \delta$ 时，就有

$$\|f(x) - f(O)\| = \|f(x)\| \leqslant \frac{p(x)}{\|x\|}\|x\| \leqslant \|x\| < \varepsilon,$$

所以 f 连续．

因为 C 是紧致的，D^n 是 Hausdorff 的而 f 是连续的，一一的，其逆为 $g: D^n \to C$：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{p(x)}x & x \neq O, \\ O & x = O. \end{cases}$$

故由 A4.4.1(3)即得 f 是同胚映射．所以 C 与 D^n 同胚． □

注　与 E^n 中单位开球同胚的空间叫做 n 维开胞腔，而与 E^n 中单位闭球体同胚的空间叫做 n 维闭胞腔．于是 E^n 中内部非空的紧致凸集是 n 维闭胞腔，而非空的有界的开的凸集是 n 维开胞腔．

C　练习题

4.4.1　设 X 上有两个拓扑 τ_1, τ_2．证明：

(1) 如果 $\langle X, \tau_1\rangle$ 是紧致的，$\langle X, \tau_2\rangle$ 是 Hausdorff 的，且 $\tau_2 \subset \tau_1$，则 $\tau_1 = \tau_2$．

(2) 如果 $\langle X, \tau_2\rangle$ 是 Husdorff 的，$\tau_2 \subset \tau_1$ 且 $\tau_2 \neq \tau_1$，则 $\langle X, \tau_1\rangle$ 不是紧致的．

(3) 如果 $\langle X, \tau_1\rangle$ 是紧致的，$\tau_2 \subset \tau_1$ 且 $\tau_2 \neq \tau_1$，则 $\langle X, \tau_2\rangle$ 不是 Hausdorff 的．

4.4.2　证明 Lindolöf(或紧致)的正则空间 $\langle X, \tau\rangle$ 是完全正则的．

4.4.3　设 $\langle X, \tau\rangle$ 为紧致 Hausdorff 空间．证明对任意两个不相交的闭集 A, B 总存在 $U, V \in \tau$，s.t. $A \subset U$，$B \subset V$ 且 $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$．

4.4.4　设 A 为正则空间 $\langle X, \tau\rangle$ 的紧致子集，证明：若 $A \subset B \subset \overline{A}$，则 B 也是 X 的紧致子

集.

§4.5 Urysohn 度量化定理与紧度量空间

A 内容提要

4.5.1 定义 对于拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$,如果存在 X 的度量 ρ 使 τ 就是 ρ 诱导的拓扑,则称$\langle X,\tau\rangle$可度量化.

$\langle X,\tau\rangle$可度量化$\Leftrightarrow X$ 同胚于某度量空间或可嵌入某度量空间.

4.5.2 定理(Urysohn 度量化定理) 每个第二可数的 T_4(等价地第二可数 T_3)空间都可度量化.

4.5.3 定义 设 A 为度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 的子集,如果 $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ F\subset X$ s.t. F 有限且 $A\subset\bigcup_{x\in F}B(x,\varepsilon)$,则称 A 是全有界的.

4.5.4 定理 设$\langle X,\rho\rangle$为度量空间,$A\subset X$.

(1) A 全有界$\Rightarrow A$ 有界.

(2) X 具有 B-W 性质$\Rightarrow X$ 全有界$\Rightarrow X$ 是可分的,Lindelöf 的,第二可数的.

(3) X 具有 B-W 性质$\Leftrightarrow X$ 可数紧$\Leftrightarrow X$ 序列紧$\Leftrightarrow X$ 紧致(再由 A5.5.2 知也等价于伪紧).

由于(3)的缘故,我们就把度量空间的这四种等价的性质统称是"紧"的.但要注意,在泛函分析中,一般地不用"子空间"这个概念,对于度量空间的子集叫做"列紧的",与我们在拓扑学中叫做"序列紧的"或等价的"具有 B-W 性质"不一样,因为在拓扑学中,是把子集当作子空间看待的,泛函分析中的"自列紧"才与拓扑学中叫做"序列紧"、"B-W 性质"一样.

4.5.5 定理 度量空间的每个紧子集(作为子空间是紧的!记住在本课程中总是这样理解的)都是有界闭集.

4.5.6 定理 由紧致(或序列紧,或可数紧)的拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 到 E^1 的任一连续映射 $f: X\to E^1$ 有最大值与最小值,即$\exists\ x_1,x_2\in X$ s.t. $f(x_1)=\max f(X)$, $f(x_2)=\min f(X)$.

4.5.7 定义 (1) 设 $\mathscr{G}$ 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的开覆盖,$\lambda>0$. 如果$\forall\ A\subset X,\delta(A)<\lambda\Rightarrow\exists\ G\in\mathscr{G}$ s.t. $A\subset G$. 则称 λ 为开覆盖 $\mathscr{G}$ 的 Lebesgue 数,其中 $\delta(A)$是 A 的直径.

(2) 由度量空间$\langle X,\rho\rangle$到$\langle Y,d\rangle$的映射 $f: X\to Y$,如果满足$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ s.t.

$$\rho(x,x')<\delta\Rightarrow d(f(x),f(x'))<\varepsilon,$$

则称 f 为一致连续的.

显然一致连续必连续.

4.5.8 定理 紧度量空间的任一开覆盖都有 Lebesgue 数.

4.5.9 定理 由紧度量空间到度量空间的连续映射是一致连续的.

B 例题

Urysohn 度量化定理给出了拓扑空间可度量化的一个充分条件，或者说给出了拓扑空间可度量化使之成为可分度量空间的充要条件．要判定一个拓扑空间不可度量化，就得检验可度量化的必要条件，也就是度量空间所具有的拓扑性质，最主要的是第一可数性以及分离公理．还有可分性，Lindelöf 性与第二可数性三者的等价性以及上一节所述的四种紧性的等价性．对于度量空间的紧性用得较多的是序列紧性和 B-W 性质．

4.5.1　证明可数的 Fort 空间可度量化，不可数的 Fort 空间不可度量化．

证　(1)　设 $\langle X,\tau\rangle$ 为 Fort 空间，$p\in X$ 固定，$\tau=\{G\subset X\mid p\notin G$ 或 $\mathscr{C}G$ 有限$\}$．假定 X 是可数的．

首先，易见每个单点集都是闭集，所以 X 是 T_1 的．

现设 $x\in X$，F 为 X 的不包含 x 的闭集．

(i) 若 $p\notin F$，则 $F\in\tau$ 且 $\mathscr{C}F$ 是包含 x 的开集，所以对 x 与 F 有不相交的开集分别包含它们．

(ii) 若 $p\in F$，则 $x\neq p$，于是 $\{x\}$ 与 $\mathscr{C}\{x\}$ 为分别包含 x 与 F 的不相交的开集．至此证明了 $\langle X,\tau\rangle$ 是正则的．

再者，令

$$\mathscr{B}=\{\{x\}\mid x\in X-\{p\}\}\cup\{G\mid p\in G \text{ 且 } \mathscr{C}G \text{ 有限}\}.$$

则 $\mathscr{B}$ 就是 X 的一个可数基，所以 X 是第二可数的．故由 Urysohn 度量化定理知可数的 Fort 空间可度量化．

(2)　对于不可数的 Fort 空间由 B1.5.5 可知它不是第一可数的，故不可度量化．□

4.5.2　设 $\langle X,\rho\rangle$ 为紧度量空间，$f: X\to X$ 连续．$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n(X)$．其中 $f^1=f$，$f^{n+1}=f\circ f^n(\forall\, n)$，证明：$A\neq\varnothing$，$A$ 是紧致子集且 $f(A)=A$．

证　首先，$\forall\, n$，$f^n(X)$ 是紧的，从而也是闭的，注意到 $\{f^n(X)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是渐缩的，所以 $A\neq\varnothing$．

又 Hausdorff 空间中紧致子集的交是紧致的，所以 A 紧致（事实上，A 是紧致子空间 $f^n(X)$ 的闭子集）．

下证 $A=f(A)$．一方面

$$f(A)=f\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n(A)\Big)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}f(f^n(X))=\bigcap_{n=2}^{\infty}f^n(X)=A.$$

另一方面，若 $x\in A$，则 $\forall\, n\ \exists\ y_n\in X$ s. t. $f^n(y_n)=x$．即 $ff^{n-1}(y_n)=x$ $(f^0=id_X)$．从而 $\forall\, n$，$\exists\ z_n\in f^{n-1}(X)$ s. t. $f(z_n)=x$．因 X 紧，故序列 $\langle z_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 有收敛的子序列 $\langle z_{n_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$，记极限为 z_0，由于 $\{f^n(X)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是渐缩的，又 $\forall\, k\ \exists\ n_{i(k)}>k$，故当 $i>i(k)$ 时，$z_{n_i}\in f^{n_i}(X)\subset f^k(X)$，而 $f^k(X)$ 闭于 X，所以 $z_0\in f^k(X)$，故有

$$z_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}f^k(X)=A.$$

于是，由 f 的连续性可得 $\langle f(z_{n_i})\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ 收敛于 $f(z_0)\in f(A)$．

但$\forall\ i$，$f(z_{n_i})=x$. 由极限的唯一性知，$f(z_0)=x$. 故有 $x\in f(A)$. 从而 $A\subset f(A)$.

综上可知 $f(A)=A$. □

注　本题的结果在有关“映射的不动点”问题中常常有用.

4.5.3　设$\langle X,\rho\rangle$为紧度量空间，证明：X 连通$\Leftrightarrow\forall\ x,y\in X$ 以及$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$ s. t. $x=x_1,x_n=y$ 且$\forall\ i\leqslant n-1,\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon$.

证　“$\Rightarrow$”　假定$\exists\ \varepsilon>0$，以及 $x,y\in X$ s. t. $\forall\ n\in\mathbf{N}$ 及$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，$\exists\ i\leqslant n-1$ s. t. $\rho(x_i,x_{i+1})\geqslant\varepsilon$. 令

$$A=\{z\in X\mid\exists\ n\in\mathbf{N}\text{ 及}\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X\text{ s. t. }x_1=x,x_n=z,\forall\ i\leqslant n-1,\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon\}$$

(注　对取定的 x,y,ε，$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，若满足：$x_1=x,x_n=y$ 且$\forall\ i\leqslant n-1,\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon$. 则称$\{x_1,\cdots,x_n\}$为连接 x,y 的 ε-链. 于是命题中的条件可叙述为：对任意的 x,y,ε 都有连接 x,y 的 ε-链. $A=\{z\in X\mid$存在连接 x,z 的 ε-链$\}$).

显然 $x\in A$，故 $A\neq\varnothing$，又据假设 $y\notin A$，故 $A\neq X$.

若 $p\in\overline{A}$，则$\exists\ a\in A$ s. t. $\rho(a,p)<\varepsilon$，据 A 的定义，就有 $p\in A$，故 A 为闭集.

又$\forall\ p\in A$，当 $q\in B(p,\varepsilon)$时，因 $\rho(p,q)<\varepsilon$，故有 $q\in A$. 于是 $B(p,\varepsilon)\subset A$，所以 A 也是开集，这就与 X 的连通性矛盾.

“$\Leftarrow$”　设$\{A,B\}$为 X 的一个分解，则 A,B 都闭于 X，从而都是紧致的. 所以$\exists\ a\in A,b\in B$ s. t. $\rho(A,B)=\rho(a,b)>0$ (C4.5.8). 对于 a,b 和 $\varepsilon=\rho(a,b)$ 由命题的假设条件，$\exists\ \{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$ s. t $a=x_1,b=x_n$ 且$\forall\ i\leqslant n-1,\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon$. 在$\{x_1,\cdots,x_n\}$中必有相邻两点 x_i,x_{i+1}合于 $x_i\in A,x_{i+1}\in B$，则对于这两点

$$\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon=\rho(a,b)=\rho(A,B)$$

引起矛盾，所以 X 连通. □

注　在必要性部分的证明中没有用到 X 是紧的这一条件，因此对任意的连通度量空间都成立.

4.5.4 (Edeistein 定理)　设$\langle X,\rho\rangle$为紧度量空间，$f:X\to X$ 合于

$$\forall\ x,y\in X\text{ 且 }x\neq y,\quad\rho(f(x),f(y))<\rho(x,y).$$

证明：f 有唯一的不动点.（即存在唯一的 $x\in X$ s. t. $f(x)=x$.）

证　[法一]　由 f 所满足的条件可见 f 连续. 故由上述 B4.5.2 知

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n(X)$$

为紧致子集($A\neq\varnothing$)，且 $f(A)=A$，现证 A 为单点集，若不然，则 $\delta(A)>0$，由于 A 紧致，故存在 $x,y\in A$ 使 $x\neq y$ 且

$$\delta(A)=\sup\{\rho(x',y')\mid x',y'\in A\}=\max\{\rho(x',y')\mid x',y'\in A\}=\rho(x,y).$$

又因 $f(A)=A$，故$\exists\ x_1,y_1\in A$ s. t. $x=f(x_1),y=f(y_1)$. 于是

$$\delta(A)=\rho(x,y)=\rho(f(x_1),f(y_1))<\rho(x_1,y_1),$$

矛盾，所以 A 为单点集，设 $A=\{x_0\}$. 由 $f(A)=A$，即得 $f(x_0)=x_0$.

若另有 $y\neq x_0$ 使 $f(y)=y$. 则

$$\rho(x_0,y)=\rho(f(x_0),f(y))<\rho(x_0,y),$$

矛盾．所以唯一性得证．

［法二］ 考虑 $g: X\to E^1, x\mapsto g(x)=\rho(x,f(x))$，易见 g 连续．由于 X 紧致，故 $\exists\ x_0\in X$ s.t.

$$g(x_0)=\min g(X).$$

假定 $f(x_0)\neq x_0$，则

$$g(f(x_0))=\rho(f(x_0),f^2(x_0))<\rho(x_0,f(x_0))=g(x_0)$$

与 $g(x_0)$ 是 g 的最小值矛盾．所以 $f(x_0)=x_0$.

至于唯一性同上． □

4.5.5 设 $\langle X,\rho\rangle,\langle Y,d\rangle$ 为度量空间，$S\subset X$，$f: S\to Y$. 在点 $x\in X$ 处 f 的振动定义为

$$\omega(f,x)=\inf\{\delta(f(S\cap G))\mid G\in\mathcal{N}_X(x)\cap\tau_\rho\},$$

我们约定 $\delta(\varnothing)=0$. 证明：

(1) f 在 x 处连续（$x\in S$，S 为子空间）$\Leftrightarrow f$ 在 x 处的振动 $\omega(f,x)=0$.

(2) 若 f 在 S 上一致连续，则 $\forall\ x\in X, \omega(f,x)=0$.

证 (1) "$\Rightarrow$" 由 f 在 x 处连续，$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \sigma>0$ s.t. $\forall\ x'\in B_\rho(x,\sigma)\cap S$,

$$d(f(x),f(x'))<\varepsilon/3.$$

则

$$\delta(f(S\cap B_\rho(x,\sigma)))\leqslant 2\varepsilon/3<\varepsilon.$$

所以

$$\omega(f,x)=0.$$

"$\Leftarrow$" 由 $\omega(f,x)=0$ 知 $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ G\in\mathcal{N}_X(x)\cap\tau_\rho$ s.t.

$$\delta(f(S\cap G))<\varepsilon.$$

则当 $x'\in S\cap G(\in\mathcal{N}_S(x))$ 时，

$$d(f(x),f(x'))<\varepsilon.$$

故 f 在 x 处连续．

(2) $\forall\ x\in X$,

(i) 若存在 $G\in\mathcal{N}_X(x)\cap\tau_\rho$ s.t. $G\cap S=\varnothing$，则

$$\delta(f(G\cap S))=0,\text{所以 }\omega(f,x)=0,$$

(ii) $\forall\ G\in\mathcal{N}_X(x)\cap\tau_\rho$, $G\cap S\neq\varnothing$，则 $x\in \mathrm{Cl}_X S$.

因 f 在 S 上一致连续，故 $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \sigma>0$ s.t. 当 $x',x''\in S$ 且 $\rho(x',x'')<\sigma$ 时

$$d(f(x'),f(x''))<\varepsilon/2.$$

令 $G=B_\rho(x,\sigma/2)$，便有

$$\delta(f(G\cap S))\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon.$$

所以也有 $\omega(f,x)=0$. □

C 练习题

4.5.1 证明下述条件都等价：

(1) X 是可分的可度量化的拓扑空间．

(2) X 是 Lindelöf 的可度量化的拓扑空间．

(3) X 是第二可数的可度量化的拓扑空间．

(4) X 是第二可数的 T_3 空间．

(5) X 是第二可数的 Tychonoff 空间．

(6) X 是第二可数的 T_4 空间．

4.5.2 判断下述空间是否可度量化：

(1) 无限集 X 取有限补拓扑．

(2) Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$.

(3) 切盘拓扑空间(C4.3.4).

(4) 离散拓扑空间．

4.5.3 证明仅含有限个点的拓扑空间可度量化的充要条件是 X 为离散空间．举出一个有可数无限个点的可度量化空间，但非离散的例子．

4.5.4 判断下述集合各在 E^2,E^n 中是否有界，是否为闭集，是否紧致．

(1) $A=\{\langle x,\frac{1}{x}\rangle\in E^2\,|\,0<x\leqslant 1\}$.

(2) $B=\{\langle x,\sin\frac{1}{x}\rangle\in E^2\,|\,0<x\leqslant 1\}$.

(3) $S^{n-1}(n\in\mathbf{N})$.

(4) $\overline{B(O,1)}$,(E^n 的闭球体，$n\in\mathbf{N}$).

4.5.5 举例说明度量空间的有界闭集未必紧致．

4.5.6 $\forall\, n,m\in\mathbf{N}$, S^n 与 E^m 是否同胚？为什么？

4.5.7 证明切盘拓扑空间的下述子空间

$$S = P \cup L_0$$

可度量化．其中 $P=\mathbf{R}\times(0,+\infty)$,$L_0=\{\langle x,0\rangle\,|\,x\in\mathbf{Q}\}$.

4.5.8 设 A,B 为度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 的紧子集($A\neq\varnothing,B\neq\varnothing$)，$A\cap B=\varnothing$，证明存在 $a\in A,b\in B$ 使

$$\rho(A,B) = \rho(a,b) > 0.$$

并讨论将 A 或 A,B 换成闭子集时，情况如何．

4.5.9 设 $\langle X,\rho\rangle$ 为紧度量空间，如果 $f: X\to X$ 满足条件：

$$\forall\, x,y \in X,\quad \rho(f(x),f(y)) = \rho(x,y)$$

(即 f 是保距的，见 B1.6.18)，证明 f 是满射(从而 f 是等距的). 举例说明当 $\langle X,\rho\rangle$ 非紧时，f 不必为满射．

4.5.10 设 $\langle X,\rho\rangle$,$\langle Y,d\rangle$ 为度量空间，$f: X\to Y$. 证明：如果 f 在 X 的任一紧集上连续，则 f 在 X 上连续．

第五章　分离性与紧性(Ⅱ)

§5.1　完备度量空间与概率度量空间

A　内容提要

5.1.1 定义　设$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的序列，如果$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ i,j\geqslant n$，$\rho(x_i,x_j)<\varepsilon$，则称$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$为 Cauchy 序列．如果$\langle X,\rho\rangle$的每个 Cauchy 序列都收敛，则称$\langle X,\rho\rangle$为完备的．

度量空间的完备性与全有界性都不是拓扑性质．

5.1.2 定理　(1) 度量空间中任一 Cauchy 序列的接触点也是它的极限点．

(2) $\langle X,\rho\rangle$完备$\Leftrightarrow X$的每个全有界的无限子集都有聚点．

5.1.3 定理　$\langle X,\rho\rangle$是紧的$\Leftrightarrow\langle X,\rho\rangle$既完备又全有界．

5.1.4 定义 (1)函数$f:E^1\to[0,\infty)$如果是不减的，左连续的，且$\inf\limits_{t\in\mathbf{R}}f(t)=0$，$\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}f(t)=1$，则称$f$为分布函数．用$D$表示一切分布函数构成的集合．用$H$表示由当$t>0$时$H(t)=1$；当$t\leqslant 0$时，$H(t)=0$所定义的分布函数．

(2)　设X为一非空的抽象集合．$F:X\times X\to D$(记$F(x,y)=F_{x,y}$)满足条件：$\forall\ x,y\in X$

[PM.1]　$F_{x,y}(0)=0$，

[PM.2]　$F_{x,y}=H\Leftrightarrow x=y$，

[PM.3]　$F_{x,y}=F_{y,x}$.

又映射$\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$满足条件：$\forall\ a,b,c,d\in[0,1]$

[Δ.1]　$\Delta(a,1)=a$，$\Delta(a,0)=0$.

[Δ.2]　$\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$.

[Δ.3]　$a\leqslant c,b\leqslant d\Rightarrow\Delta(a,b)\leqslant\Delta(c,d)$.

[Δ.4]　$\Delta(\Delta(a,b),c)=\Delta(a,\Delta(b,c))$.

(称Δ为三角范数，或t—范数，t-模)，且有下述 Menger 广义三角不等式成立：

[PM.4]　$\forall\ x,y,z\in X$，$t_1,t_2\geqslant 0$，

$$F_{x,z}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1),\ F_{y,z}(t_2)).$$

则称$\langle X,F,\Delta\rangle$为 Menger 概率度量空间(简称 Menger 空间).

直观上,$\forall\ x,y\in X$,$t\in\mathbf{R}$,$F_{x,y}(t)$可理解为x到y的距离小于t的概率.对于度量空间$\langle X,\rho\rangle$,若$\forall\ x,y\in X$,$t\in\mathbf{R}$令$F_{x,y}(t)=H(t-\rho(x,y))$.又$\forall\ a,b\in[0,1]$,令$\Delta(a,b)=\min(a,b)$,则$F:X\times X\to D$与$\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$满足上述所有条件,$\langle X,F,\Delta\rangle$自然地成为 Menger 空间.

5.1.5 定理 设$\langle X,F,\Delta\rangle$为 Menger 空间,且$\Delta$满足条件:$\sup\limits_{a<1}\Delta(a,a)=1$,则$\forall\ x\in X$可由一切形如

$$U_x(\varepsilon,\lambda)=\{y\in X\,|\,F_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

的子集构成的集族$\mathscr{U}(x)=\{U_x(\varepsilon,\lambda)\,|\,\varepsilon>0,\ 0<\lambda\leqslant 1\}$为相应点$x$处的邻域基生成$X$的一个拓扑$\tau$.且拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$是 Hausdorff 的,第一可数的.

注 $\mathscr{U}(x)$中的元$U_x(\varepsilon,\lambda)$是x的邻域而未必是开邻域.$U_x(\varepsilon,\lambda)$与度量空间中的球形邻域$B(x,\varepsilon)$很相似.球形邻域有一个参数ε,现在x的邻域$U_x(\varepsilon,\lambda)$有两个参数ε,λ.在证明这个定理的过程中,条件[Δ.1],[Δ.2],[Δ.4]也可删除.此时称之为 SST 空间.

B 例题

5.1.1 证明 Hilbert 空间$\langle H,\rho_H\rangle$(B1.2.14)是完备的度量空间.

证 设$x^n=\langle x_i^n\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in H$,$\langle x^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$为$H$中的 Cauchy 序列(注意,这里上标$n$表示序列中的第$n$项,下标$i$表示$x^n$的第$i$个坐标),则

$$\forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}\ \text{s.t. 当}\ m,n\geqslant n_0(\varepsilon)\ \text{时},$$
$$\rho_H(x^m,x^n)<\varepsilon. \tag{5.1.1-1}$$

所以$\forall\ i\in\mathbf{N}$也有$|x_i^m-x_i^n|<\varepsilon$.因此由第$i$个坐标构成的序列$\langle x_i^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛于某一点$x_i\in E^1$.令$x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$(注意,我们还不知道这个$x$是否属于$H$).

由(5.1.1-1),对每个固定的$k\in\mathbf{N}$及一切$m,n\geqslant n_0(\varepsilon/2)$,有

$$\Big(\sum_{i=1}^{k}(x_i^m-x_i^n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\rho_H(x^m,x^n)<\varepsilon/2.$$

所以当固定n,让$m\to\infty$时,就得

$$\Big(\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_i^n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon/2.$$

再让$k\to\infty$得

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-x_i^n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon. \tag{5.1.1-2}$$

由于

$$\begin{aligned}(x_i)^2&=(x_i-x_i^n+x_i^n)^2\\&=(x_i-x_i^n)^2+(x_i^n)^2+2(x_i-x_i^n)(x_i^n)\\&\leqslant 2(x_i-x_i^n)^2+2(x_i^n)^2.\end{aligned}$$

所以当取定$\varepsilon>0$,$n\geqslant n_0(\varepsilon/2)$后,$\forall\ k\in\mathbf{N}$由(5.1.1-2)得

$$s_k \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{i=1}^{k}(x_i)^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_i^n)^2 + 2\sum_{i=1}^{k}(x_i^n)^2$$
$$< 2\varepsilon^2 + 2\sum_{i=1}^{k}(x_i^n)^2.$$

因为 $x^n \in H$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i^n)^2$ 收敛，从而 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i)^2$ 的部分和序列 $\langle s_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 是单调增的有上界的序列，故收敛．至此我们证明了 $x \in H$.

于是(5.1.1-2)就表明对任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\exists\ n_0(\varepsilon/2) \in \mathbf{N}$, s.t. $n \geqslant n_0(\varepsilon/2)$ 时，$\rho_H(x, x^n) < \varepsilon$. 即 $\langle x^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 收敛于 x. 所以 $\langle H, \rho_H\rangle$ 是完备的． □

5.1.2 证明实值连续函数空间 $\langle \mathscr{C}([0,1],E^1), \rho^*\rangle$(B1.3.6)是完备的．

证 设 $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 为 Cauchy 序列，则

$\forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ n_0(\varepsilon)$ s.t. 当 $m,n \geqslant n_0(\varepsilon)$ 时，

$$\rho^*(f_m, f_n) < \varepsilon.$$

于是 $\forall\ t\in[0,1]$

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \tag{5.1.2-1}$$

所以 $\forall\ t\in[0,1]$，$\langle f_n(t)\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 是 E^1 的 Cauchy 序列，它收敛于某个值，记为 $f(t)$. 我们证明由此定义的映射(函数) $f: [a,b]\to E^1$ 连续，且 $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 在 $\mathscr{C}([0,1],E^1)$ 中收敛于 f.

先证在数学分析的意义下 $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 一致收敛于 f.

由(5.1.2-1)，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n_0(\varepsilon/2)$ s.t. $\forall\ m,n \geqslant n_0(\varepsilon/2)$ 及 $\forall\ t\in[0,1]$ 有

$$f_n(t) - \varepsilon/2 < f_m(t) < f_n(t) + \varepsilon/2.$$

固定 n,t，让 $m\to\infty$ 即得

$$f_n(t) - \varepsilon/2 \leqslant f(t) \leqslant f_n(t) + \varepsilon/2,$$

也就是当 $n \geqslant n_0(\varepsilon/2)$ 时，$\forall\ t\in[0,1]$

$$|f(t) - f_n(t)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon. \tag{5.1.2-2}$$

所以 $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 一致收敛于 f. 而 f_n 都连续，故由数学分析的知识可知 f 连续．即

$$f \in \mathscr{C}([0,1],E^1).$$

再由(5.1.2-2)可得

$$\rho^*(f, f_n) = \sup_{t\in[0,1]}|f(t) - f_n(t)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

所以 $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 在函数空间 $\langle \mathscr{C}([0,1],E^1), \rho^*\rangle$ 中收敛于 f. 从而 $\langle \mathscr{C}([0,1],E^1), \rho^*\rangle$ 完备．

□

5.1.3 证明 $\langle X,\rho\rangle$ 完备 $\Leftrightarrow X$ 的每个直径趋于零的非空闭集的渐缩序列 $\langle F_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 之交 $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$ 恰有一点．

证 "$\Rightarrow$" $\forall\ n \in \mathbf{N}$ 取 $x_n \in F_n$，易见序列 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 是 Cauchy 序列．故收敛于一点 x，由于每个 F_n 都是闭的，又当 $k \geqslant n$ 时，$x_k \in F_n$，所以 $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$.

如果再有 $y \in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$. 由于 $\delta(F_n) \to 0$ 得 $\rho(x,y) = 0$，故 $y = x$. 因此 $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$ 恰有一点．

"$\Leftarrow$" 设 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 为 Cauchy 序列，则 $\forall\ k \in \mathbf{N}\ \exists\ n \in \mathbf{N}$ s.t. 当 $i,j \geqslant n$ 时，$\rho(x_i, x_j) < \frac{1}{2^k}$.

令 $n(k)=\min\{n\in\mathbf{N}$ 当 $i,j\geqslant n$ 时，$\rho(x_i,x_j)<\frac{1}{2^k}\}$. 则 $\forall\ k$, $n(k+1)\geqslant n(k)$.

再令 $F_k=\overline{B\left(x_{n(k)},\ \frac{1}{2^{k-1}}\right)}$，$\forall\ k\in\mathbf{N}$. 则$\forall\ k\in\mathbf{N}$, $F_k\neq\varnothing$，且

$$\delta(F_k)=\frac{2}{2^{k-1}}\to 0\quad(k\to\infty\ \text{时}).$$

若 $x\in F_{k+1}=\overline{B\left(x_{n(k+1)},\ \frac{1}{2^k}\right)}$，则 $\rho(x,x_{n(k+1)})\leqslant\frac{1}{2^k}$,

$$\rho(x_{n(k)},x)\leqslant\rho(x_{n(k)},\ x_{n(k+1)})+\rho(x_{n(k+1)},x)$$
$$<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

所以 $x\in F_k$. 即 $F_{k+1}\subset F_k$. 于是由假设条件，存在唯一的 $x_0\in\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}F_n$.

于是$\forall\ \varepsilon>0$，取 $k\in\mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{2^{k-1}}<\frac{\varepsilon}{2}$，则当 $n\geqslant n(k)$时，

$$\rho(x_0,x_n)\leqslant\rho(x_0,x_{n(k)})+\rho(x_{n(k)},\ x_n)$$
$$<\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}<\varepsilon.$$

所以$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛于 x_0，从而 $\langle X,\rho\rangle$ 完备． □

5.1.4 定义：设 A 为拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$的子集，若$(\overline{A})^\circ=\varnothing$，则称 A 在 X 中是无处稠密的．若 X 的子集 E 能写成 $E=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$，其中每个 A_n 是无处调密的，则称 E 属于第一范畴的(或说是第一纲的)，否则便是属于第二范畴的(或说是第二纲的). 证明下述命题：

(1) 如果 A 是拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$的非空的无处稠密的子集，那么 $\overline{A}\neq X$.

(2) $\langle X,\tau\rangle$中有限个无处稠密集之并是无处稠密的．

(3) (Baire 范畴定理) 完备度量空间是属于第二范畴的．

证 (1) 是明显的．

(2) 只需考虑两个无处稠密子集 A,B 之并．令 $G=(\overline{A\cup B})^\circ$，则 $G\subset\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 于是 $G\cap\mathscr{C}\overline{B}\subset\overline{A}$，所以

$$G\cap\mathscr{C}\overline{B}=(G\cap\mathscr{C}\overline{B})^\circ\subset(\overline{A})^\circ=\varnothing.$$

于是 $G\subset\overline{B}$. 从而 $G=G^\circ\subset(\overline{B})^\circ=\varnothing$. 这就证明了 $A\cup B$ 是无处稠密的．

(3) 任取 X 的可数多个无处稠密的子集 $A_n(n\in\mathbf{N})$，要证 $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n\neq X$. 为此，我们用归纳法构造一个点序列$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$以及以 x_n 为中心的开球 B_n 的序列如下：

因为 A_1 无处稠密，由(1) $\exists\ x_1\in\mathscr{C}\overline{A}_1$，并作开球 $B_1=B(x_1,\varepsilon_1)\subset\mathscr{C}\overline{A}_1$，其中 $\varepsilon_1<\frac{1}{2^{1+1}}$.

现设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$; $B_1,B_2,\cdots,B_{n-1}$已经作出，其中 $B_i=B(x_i,\varepsilon_i)\subset\mathscr{C}\overline{A}_i$ 且 $\varepsilon_i<\frac{1}{2^{i+1}}$ ($\forall\ i$)，又使

$$B_1\supset\overline{B}_2\supset B_2\supset\cdots\supset\overline{B}_{n-2}\supset B_{n-2}\supset\overline{B}_{n-1}\supset B_{n-1}.$$

再由 A_n 无处稠密以及 $B_{n-1}\neq\varnothing$得 $B_{n-1}\not\subset\overline{A}_n$，故 $B_{n-1}\cap\mathscr{C}\overline{A}_n\neq\varnothing$. 从而$\exists\ x_n\in B_{n-1}\cap\mathscr{C}\overline{A}_n$，并作 $B_n=B(x_n,\varepsilon_n)$使

$$x_n\in B_n\subset\overline{B}_n\subset B_{n-1}\cap\mathscr{C}\overline{A}_n,$$

以及 $\varepsilon_n<\frac{1}{2^{n+1}}$.

由归纳原理,就得$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$与$\langle B_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$,并满足条件:$\forall\ n\in\mathbf{N}$.

(1) $B_n\subset\mathscr{C}\overline{A}_n$(其中 $B_n=B(x_n,\varepsilon_n)$).

(2) $\varepsilon_n<\frac{1}{2^{n+1}}$.

(3) $B_n\supset\overline{B}_{n+1}$.

由(2),(3)可见$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$是 X 中的 Cauchy 序列,故由完备性可知它收敛于一点 x. 由条件(3)和(1)可知$\forall\ n,x\notin\overline{A}_n$,从而 $x\notin A_n$. 这就完成了证明. □

5.1.5 证明存在连续的实值函数 $f\in\mathscr{C}([0,1],E^1)$使 f 在任何一点 $x\in[0,1]$处都不可微.

证 由上述B5.1.2、B5.1.4 可知$\langle\mathscr{C}([0,1],E^1),\rho^*\rangle$属于第二范畴. $\forall\ n\in\mathbf{N}$ 令 A_n 为所有满足下述条件的$[0,1]$上的连续函数 f 组成的集合:

$\exists\ x\in[0,1]$ s.t. 对符合 $x+h\in[0,1]$以及$|h|<\frac{1}{n}$的所有 h 有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\right|\leqslant n. \tag{5.1.5-1}$$

当 f 在某个点 $x\in[0,1]$处可微时,必然存在足够大的 n 使 $f\in A_n$. 于是只要能证明$\forall\ n$, A_n 是无处稠密的,便有 $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n\neq\mathscr{C}([0,1],E^1)$. 于是存在连续函数 $f\notin\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$. 这个 f 就是在$[0,1]$上处处不可微的.

为证明 A_n 无处稠密,先证 A_n 是闭集,任取 A_n 中一个收敛序列$\langle f_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$,其极限为 f,我们证 $f\in A_n$.

$f_k\in A_n$,意味着$\exists\ x_k\in[0,1]$使(5.1.5-1)成立. 由于$[0,1]$是紧度量空间,故$\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$有收敛子序列,不妨仍记成$\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$,并设极限为 x,现考察

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant\left|\frac{f(x+h)-f(x_k+h)}{h}\right|+\left|\frac{f(x_k+h)-f_k(x_k+h)}{h}\right|$$
$$+\left|\frac{f_k(x_k+h)-f_k(x_k)}{h}\right|+\left|\frac{f_k(x_k)-f(x_k)}{h}\right|+\left|\frac{f(x_k)-f(x)}{h}\right|$$

由于$\langle f_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$在度量 ρ^* 意义下的收敛, 即为数学分析意义下的一致收敛,故 f 连续. 现在如果固定 h,任给 $\varepsilon>0$, 则存在充分大的 $k\in\mathbf{N}$ 使上式右端第一项与第五项之值小于 $\varepsilon/4$, 又由于$\langle f_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$一致收敛于 f 得上式右端的二、四两项之值都小于 $\varepsilon/4$(只要 k 充分大),从而就有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<n+\varepsilon.$$

再让 $\varepsilon\to0$ 就得

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant n$$

从而 $f\in A_n$,即 A_n 为闭集.

再证 A_n 即 $\overline{A}_n$ 无内点.

$\forall\ f\in A_n,\varepsilon>0$ 据著名的 Weierstrass 逼近定理可知存在多项式 p, 使 $\rho^*(f,p)<\varepsilon/2$. 因为 $p(x)$在$[0,1]$上的导函数有界,故由微分中值定理可知,对所有的 $x\in[0,1]$以及符合 x

$+h\in[0,1]$，$|h|<\frac{1}{n}$的 h 有 $M>0$ 使

$$\left|\frac{p(x+h)-p(x)}{h}\right|\leqslant M.$$

今取 q 为$[0,1]$上非负的锯齿形函数使 $\sup\limits_{x\in[0,1]} q(x)<\varepsilon/2$，且每一节线段的斜率的绝对值大于 $M+n$，令 $g:[0,1]\to E^1$ 为$\forall\, x\in[0,1]$

$$g(x)=p(x)+q(x),$$

则 g 属于 f 的 ε-球形邻域，但 $g\notin A_n$，这是因为

$$\begin{aligned}\rho^*(f,g)&=\sup_{x\in[0,1]}|g(x)-f(x)|=\sup_x|p(x)+q(x)-f(x)|\\&\leqslant\sup_x|p(x)-f(x)|+\sup_x|q(x)|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

但因

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right|&=\left|\frac{q(x+h)-q(x)}{h}+\frac{p(x+h)-p(x)}{h}\right|\\&\geqslant\left|\frac{q(x+h)-q(x)}{h}\right|-\left|\frac{p(x+h)-p(x)}{h}\right|\\&>M+n-M=n.\end{aligned}$$

所以 $f\notin(A_n)^\circ=(\overline{A}_n)^\circ$. 从而 A_n 是无处稠密的. □

这里给出了 Baire 定理的一个应用. 证明了处处连续却无处可微的函数的存在性. 在泛函分析中还可用 Baire 定理证明一致有界原理(共鸣定理).

5.1.6 设$\langle X,F,\Delta\rangle$为 Menger 空间(或 SST 空间)，$\sup\limits_{0\leqslant a<1}\Delta(a,a)=1$，证明:若 X 可分，则 X 第二可数.(X 的拓扑由 A5.1.5 决定，下面都这样理解.)

证 设 D 为 X 的可数的稠密子集，令

$$\mathscr{B}=\left\{\mathring{U}_x\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\Big|\,x\in D,n\in\mathbf{N}\right\},$$

则 $\mathscr{B}$ 为开集的可数族，现设 G 为开集，$y\in G$. 则 $\exists\ \varepsilon>0,\ \lambda\in(0,1]$ s.t. $U_y(\varepsilon,\lambda)\subset G$.

取 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{n}<\min\{\varepsilon/2,\lambda\}$，且

$$\Delta\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)>1-\lambda,$$

再取 $\lambda_1\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$，s.t. $\Delta(1-\lambda_1,1-\lambda_1)>1-\frac{1}{n}$.

满足上述两个不等式的 n 与 λ_1 的存在性是由$\sup\limits_{a<1}\Delta(a,a)=1$ 决定的.

因 $\overline{D}=X$，故 $\exists\ x\in D$ s.t. $F_{x,y}\left(\frac{1}{2n}\right)>1-\lambda_1$. 取 $\mathring{U}_x\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\in\mathscr{B}$ 就有

$$y\in\mathring{U}_x\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\subset G.$$

事实上，当 $z\in U_y\left(\frac{1}{2n},\lambda_1\right)$ 时，有

$$F_{x,z}\left(\frac{1}{n}\right)\geqslant\Delta\left(F_{x,y}\left(\frac{1}{2n}\right),\ F_{y,z}\left(\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$\geqslant \Delta(1-\lambda_1, 1-\lambda_1) > 1-\frac{1}{n},$$

即 $z\in U_x(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$，故 $U_y(\frac{1}{2n},\lambda_1)\subset U_x(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$，从而 $y\in \mathring{U}_x(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

再者，$\forall\ u\in \mathring{U}_x\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$，

$$\begin{aligned} F_{u,y}(\varepsilon) &\geqslant \Delta\left(F_{u,x}(\frac{\varepsilon}{2}), F_{x,y}(\frac{\varepsilon}{2})\right) \\ &\geqslant \Delta\left(F_{u,x}(\frac{1}{n}), F_{x,y}(\frac{1}{n})\right) \\ &\geqslant \Delta\left(1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) > 1-\lambda. \end{aligned}$$

所以 $u\in U_y(\varepsilon,\lambda)\subset G$. 故 $y\in \mathring{U}_x(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\subset G$. 这就证明了 $\mathscr{B}$ 是 $\langle X,\tau\rangle$ 的可数基． □

类似地可以证明 $\langle X,F,\Delta\rangle$ 是 Lindelöf 的 $\Rightarrow X$ 是第二可数的．从而对 $\langle X,F,\Delta\rangle$ 而言，可分性，Lindelöf 性，第二可数性三者等价．于是普通度量空间中相应的结果可作为这里的特例了．

5.1.7 定义：设 $\langle X,F,\Delta\rangle$ 为 Menger 空间（或 SST 空间），$\sup\limits_{a<1}\Delta(a,a)=1$，$A\subset X$，如果 $\forall\ \varepsilon>0$，$\lambda\in(0,1]$，$\exists\ S\subset X$ s.t. S 有限且

$$A\subset\bigcup_{x\in S}U_x(\varepsilon,\lambda),$$

则称 A 为全有界的（也叫预紧的）．证明：

$$\langle X,F,\Delta\rangle \text{ 可数紧} \Rightarrow X \text{ 全有界} \Rightarrow X \text{ 可分}.$$

证 (1) 假定 X 可数紧但不是全有界的，即 $\exists\ \varepsilon>0$，$\lambda\in(0,1]$ 使对每个有限集 $S\subset X$，$X\neq\bigcup\limits_{x\in S}U_x(\varepsilon,\lambda)$. 则任取 $x_1\in X$，

$\exists\ x_2\in X$ s.t. $F_{x_1,x_2}(\varepsilon)\leqslant 1-\lambda$,

$\exists\ x_3\in X$ s.t $F_{x_i,x_3}(\varepsilon)\leqslant 1-\lambda$, $(i=1,2)$

……

$\exists\ x_n\in X$ s.t. $F_{x_i,x_n}(\varepsilon)\leqslant 1-\lambda$, $(i=1,2,\cdots,n-1)$.

由归纳法，得 X 的序列 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 使当 $i\neq j$ 时

$$F_{x_i,x_j}(\varepsilon)\leqslant 1-\lambda.$$

则 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 无接触点．事实上，若有接触点 x_0 则取 $\lambda_1<\lambda$ s.t. $\Delta(1-\lambda_1,1-\lambda_1)>1-\lambda$. 则必有

$$x_i\in U_{x_0}(\frac{\varepsilon}{2},\lambda_1),\ \text{又}\ \exists\ j>i\ \text{s.t.}\ x_j\in U_{x_0}(\frac{\varepsilon}{2},\lambda_1).$$

而 $F_{x_i,x_j}(\varepsilon)\geqslant\Delta\left(F_{x_i,x_0}(\frac{\varepsilon}{2}), F_{x_0,x_j}(\frac{\varepsilon}{2})\right)\geqslant\Delta(1-\lambda_1,1-\lambda_1)>1-\lambda$，矛盾．所以 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 无接触点，这又与 X 的可数紧性矛盾．所以 X 是全有界的．

(2) 设 X 全有界，$\forall\ n\in\mathbf{N}\ \exists\ S_n\subset X$ 使 S_n 有限，且

$$X=\bigcup_{x\in S_n}U_x\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right).$$

令 $D=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}S_n$，则 D 可数．

$\forall\ y\in X$ 及 $U\in\mathcal{U}(x)$ $\exists\ n\in\mathbf{N}$ s. t. $U_y(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\subset U$. 又对上述 n,$\exists\ x\in S_n\subset D$ s. t. $y\in U_x(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$. 则 $F_{x,y}(\frac{1}{n})>1-\frac{1}{n}$, 故 $x\in U_y(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\cap D$, 从而 $U\cap D\neq\varnothing$,即 $y\in\bar{D}$. 这表明 D 是稠密的,即 X 可分. □

下面再介绍著名的 Banach 压缩映射原理推广到积空间的一个定理.

定义　设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间,Y 为拓扑空间,$f: X\times Y\to X\times Y$ 为积空间上的自映射. 如果 $\forall\ y_0\in Y$ $\exists\ U(y_0)\in\mathcal{U}_Y(y_0)$ 及 $\lambda(y_0)\in(0,1)$ s. t. $\forall\ y\in U(y_0)$ 以及 $\forall\ x_1,x_2\in X$ 有

$$\rho(p_1f(x_1,y),\ p_1f(x_2,y))\leqslant\lambda(y_0)\rho(x_1,x_2)$$

成立. 则称 f 为关于第一变元是局部(指相对于 Y 而言是局部的)压缩的. $p_1:X\times Y\to X$ 为投影.

5.1.8　**证明:如果 $\langle X,\rho\rangle$ 是完备度量空间,Y 是具有不动点性质(指任一连续映射 $g:Y\to Y$ 都有不动点)的拓扑空间,$f: X\times Y\to X\times Y$ 连续且关于第一变元是局部压缩的. 那么 f 存在不动点.**

证　由局部压缩的定义可知 $\forall\ y\in X$

$$p_1f(\cdot,y): X\to X$$

是压缩映射,则由 Banach 压缩映射原理(可参阅任何一本泛函分析的教科书,或见 C5.1.3),存在唯一的点,记为 $g(y)\in X$ 使

$$p_1f(g(y),y)=g(y). \tag{5.1.8-1}$$

由此定义了映射 $g: Y\to X$,使 $\forall\ y$,(5.1.8-1)成立.

下面我们证明 g 连续.

首先,$\forall\ y_0\in Y$ $\exists\ U(y_0)\in\mathcal{U}_Y(y_0)$ 以及 $\lambda(y_0)\in(0,1)$,使 $\forall\ y\in U(y_0)$ 有

$$\rho(p_1f(g(y_0),y),\ p_1f(g(y),y))\leqslant\lambda(y_0)\rho(g(y_0),g(y)).$$

再者,由于 $p_1f(g(y_0),\cdot): Y\to X$ 连续,故 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ V(y_0)\subset U(y_0)$, 其中 $V(y_0)\in\mathcal{U}_Y(y_0)$, 使 $\forall\ y\in V(y_0)$ 有

$$\rho(p_1f(g(y_0),\ y),\ p_1f(g(y_0),\ y_0))<(1-\lambda(y_0))\varepsilon.$$

于是当 $y\in V(y_0)$ 时,

$$\begin{aligned}\rho(g(y),g(y_0))&=\rho(p_1f(g(y),y),\ p_1f(g(y_0),\ y_0))\\&\leqslant\rho(p_1f(g(y),y),p_1f(g(y_0),y))\\&\quad+\rho(p_1f(g(y_0),y),\ p_1f(g(y_0),y_0))\\&<\lambda(y_0)\rho(g(y),g(y_0))+(1-\lambda(y_0))\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\rho(g(y),g(y_0))<\varepsilon.$$

这就证明 g 连续. 从而 $p_2f(g(\cdot),\cdot): Y\to Y$ 连续,而 Y 有不动点性质,故 $\exists\ y\in Y$ s. t.

$$p_2f(g(y),y)=y$$

于是

$$\begin{aligned}f(g(y),y)&=\langle p_1f(g(y),y),\ p_2f(g(y),y)\rangle\\&=\langle g(y),y\rangle\end{aligned}$$

即$\langle g(y),y\rangle$是 f 的不动点. □

注 这是 A. Fora 1982 年的一个结果(见 Pacific J. Math Vol. 99(1982), 327--335), 这里的证明作了改进. 编者对 Fora 的这一结果又作了进一步的推广. 可见:南京大学学报数学半年刊 No. 2(1987), 174—180, 以及 No. 2(1989), 67—74; 南京大学学报, Vol. 26, No. 4(1990), 541—546; 数学杂志, Vol. 12, No. 1(1992), 99—102.

有关概率度量空间的紧性,连通性,完备性等,编者也作过讨论,对于概率度量空间的不动点定理也作过探讨. 可见南京大学学报数学半年刊,No. 2(1990), 187—191, No. 2(1991), 168—176, No. 1(1992), 37—43; 工程数学学报 No. 2(1992), 120—122; 南京大学学报 Vol. 26, No. 3(1990), 384—391.

C 练习题

5.1.1 证明度量空间$\langle X,\rho\rangle$是全有界的$\Leftrightarrow X$的每个序列都含有一个 Cauchy 子序列.

5.1.2 设 A 为完备度量空间$\langle X,\rho\rangle$的子空间,证明 A 完备$\Leftrightarrow A$ 是 X 的闭子空间.

5.1.3 (Banach 压缩映射原理) 设$\langle X,\rho\rangle$为完备的度量空间,$f: X\to X$ 满足条件: $\exists\ \lambda\in(0,1)$使$\forall\ x_1,x_2\in X$,都有

$$\rho(f(x_1),f(x_2))\leqslant\lambda\rho(x_1,x_2)$$

(称 f 为压缩映射),证明 f 有唯一的不动点.

5.1.4 设$\langle X,F,\Delta\rangle$为 Menger 空间(或 SST 空间), $\sup\limits_{a<1}\Delta(a,a)=1$, 证明$\langle X,F,\Delta\rangle$的序列

$$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\text{ 收敛于 }x\Leftrightarrow\forall\ t\in\mathbf{R},\ \lim_{n\to\infty}F_{x_n,x}(t)=H(t).$$

5.1.5 设$\langle X_i,F_i,\Delta_i\rangle$为 Menger 空间(或 SST 空间), $\sup\limits_{a<1}\Delta_i(a,a)=1$, $(i=1,2)$, $f: X_1\to X_2$. 证明: f 连续的充要条件是: $\forall\ x\in X_1$ 以及 X_1 中收敛于 x 的序列 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$都有 $\langle f(x_n)\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在 X_2 中收敛于 $f(x)$.

5.1.6 设$\langle X,F,\Delta\rangle$为 Menger 空间(或 SST 空间),$\sup\limits_{a<1}\Delta(a,a)=1$. 证明:对$\langle X,F,\Delta\rangle$而言, 具有 B—W 性质,可数紧性,序列紧性,紧致性等价.

§5.2 局部紧性与一点紧化

A 内容提要

5.2.1 定义 (1) 如果 X 的每一点都有一个紧致邻域,则称 X 是局部紧的.

(2) 如果 X 同胚于紧致空间 X^* 的一个稠密子空间,则称 X^* 是 X 的紧化.

(3) $\langle X,\tau\rangle$为非紧致的拓扑空间,$\infty\notin X$, $X^*=X\cup\{\infty\}$. 令

$$\mathscr{B}(x)=\{U\in\tau \mid x\in U\},\forall\ x\in X,$$
$$\mathscr{B}(\infty)=\{X^*-F \mid F=\varnothing\ \text{或}\ F\ \text{为}\ X\ \text{的紧致闭集}\}.$$

以$\{\mathscr{B}(p)\mid p\in X^*\}$的元为相应点$p$的邻域基生成$X^*$的拓扑$\tau^*$，则称$\langle X^*,\tau^*\rangle$是$\langle X,\tau\rangle$的一点紧化(可以验证$\langle X,\tau\rangle$是$\langle X^*,\tau^*\rangle$的稠密子空间，且$X^*$是紧致的)．$\infty$叫做理想点或无穷远点．

5.2.2 定理　Hausdorff 空间$\langle X,\tau\rangle$是局部紧的$\Leftrightarrow\forall\ x\in X\ \exists\ U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $\overline{U}$是紧致的．

5.2.3 定理　X的一点紧化是 Hausdorff 的$\Leftrightarrow X$是局部紧的 Hausdorff 空间．

5.2.4 定理　局部紧的 Hausdorff 空间是完全正则的 T_1 空间．

B 例题

(一)

在处理局部紧空间的有关问题时，关键在于用好每一点都有紧致邻域这个条件．往往将“全局性”问题转化为“局部性”问题，放到由紧致邻域构成的子空间中来处理．A 5.2.3 的结果也很有用，对于局部紧的 Hausdorff 空间也通过一点紧化作为紧致 Hausdorff 空间的稠密子空间来处理．

在解局部紧空间的问题时，值得注意的是：局部紧空间的每一点只是有“紧致邻域”而不是有“紧致开邻域”，初学者常会发生这个错误．

5.2.1　试不用一点紧化直接证明：

(1) 如果X是局部紧的 Hausdorff 空间，那么X是 T_3 的(即正则的 T_1 空间)．

(2) 如果X是局部紧的正则空间，那么X是完全正则的．

证　(1)　设$x\in U\in\tau_X$. 我们要证$\exists\ W\in\tau_X$ s.t. $x\in W\subset\overline{W}\subset U$ (下面就要利用局部紧性放到子空间中来处理)由于X是局部紧的 Hausdorff 的，故$\exists\ V\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ s.t. $\overline{V}$紧致．令$F=\overline{V}$，F作为X的子空间是紧致 Hausdorff 的．当然是 T_3 的．(从现在开始要注意区分子空间与原始空间．我们仍用加横线表示在原始空间取闭包．现在x已属于F，但U未必包含在F中．)令$G=U\cap V\subset F$，显然G开于F且$x\in G$. 于是存在W开于F使

$$x\in W\subset \mathrm{Cl}_F W\subset G.$$

(有些初学者在解这道题时，往往忽略了此时在子空间F中讨论的这一事实，而直接说W是X的开集，将$\mathrm{Cl}_F W$也直接写成$\overline{W}$. 于是至此就算完成了证明，尽管结论并没有错，但逻辑上是混乱的．)

由于W开于F，而$W\subset G\subset F$，故W也开于G，又G开于X，故W也开于X，而

$$\mathrm{Cl}_F W=\overline{W}\cap F=\overline{W}\cap\overline{V}=\overline{W}(\text{因为}\ W\subset V).$$

所以$W\in\tau_X$且

$$x\in W\subset\overline{W}\subset G\subset U.$$

至此才证明了X是正则的，至于 T_1 是显然的．

(2) 设 $x\in X$, F 为不包含 x 的非空闭集,由正则性,$\exists\ U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ s.t. $x\in U\subset\overline{U}\subset\mathscr{C}F$. 由 X 的局部紧性,存在紧致子集 $V\in\mathscr{N}_X(x)$,由正则空间中紧致子集 V 的闭包 $\overline{V}$ 也紧致,令

$$S=\overline{U}\cap\overline{V},$$

则 S 闭于 $\overline{V}$,所以也紧致,于是 S 作为子空间是紧致的,正则的,当然也是 Lindelöf 的,正则的,所以是正规的 . S 既正则又正规,从而是完全正则的 .(这里为什么不像(1)那样直接取 $\overline{V}$ 为子空间呢?因为我们要定义一个函数,它在 F 上取值为 1,在 x 处取值为 0. 但不能直接取得,要借助于子空间,所以就希望 F 排斥在子空间之外,这样可以定义子空间以外的部分恒为 1,然后将这部分与子空间上的函数粘合成一个符合要求的函数 . 显然,只知道 $F\subset\mathscr{C}\overline{U}$,却不能断定 $F\subset\mathscr{C}\overline{V}$,所以要利用 S.) 由 S 的完全正则性可知,存在连续映射

$$g:S\to[0,1]$$

使 $g(x)=0$, $g(S-\mathring{S})\subset\{1\}$,其中 $\mathring{S}=\mathrm{Int}_X S$. (这是因为 $x\in U\cap V\subset S$ 所以 $x\in\mathring{S}\in\tau_S$.) 再令

$$h:X-\mathring{S}\to[0,1],\ y\mapsto h(y)=1.$$

由于 $S\cap(X-\mathring{S})=S-\mathring{S}$, 故 $g|_{S\cap(X-\mathring{S})}=h|_{S\cap(X-\mathring{S})}$. 于是可令 $f:X\to[0,1]$ 为

$$f(y)=\begin{cases}g(y) & y\in S\\ h(y) & y\in X-\mathring{S}\end{cases}$$

则由粘合引理可知 f 连续,且 $f(x)=0$, $f(F)=\{1\}$. 所以 X 是完全正则的 . □

5.2.2 设 $\langle X,\tau\rangle$ 是正则的(或 Hausdorff 的),则下述条件等价:

(1) X 是局部紧的 .

(2) $\forall\ x\in X$ 以及 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)\ \exists\ V\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $\overline{V}$ 紧致且 $\overline{V}\subset U$.

(3) $\forall\ x\in X$ 以及 $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$ 存在紧致子集 F 使

$$x\in\mathring{F}\subset F\subset U.$$

证 (1) ⇒(2) $\forall\ x\in X$ 以及 $U\in\mathscr{N}(x)$. 由(1) $\exists\ G\in\mathscr{N}(x)$ s.t. G 紧致 . 由正则性 $\overline{G}$ 也紧致 . 又由正则性对于 $\mathring{U}\cap\mathring{G}\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ $\exists\ V\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $\overline{V}\subset\mathring{U}\cap\mathring{G}$. 由 $\overline{V}\subset\overline{G}$ 可知 $\overline{V}$ 紧致,且 $\overline{V}\subset U$. 故 V 合要求 . 若 X 是 Hausdorff 的;由(1)X 也是正则的 . 所以仍有(2)成立 .

(2) ⇒(3)⇒(1) 显然. □

5.2.3 设 $\langle X,\tau\rangle$ 是局部紧的,正则的(或 Hausdorff 的),证明对于 X 的任一紧致子集 A 及包含 A 的开集 V 都有:

(1) $\exists\ U\in\tau$ s.t. $A\subset U\subset\overline{U}\subset V$,且 $\overline{U}$ 紧致 .

(2) $\exists\ f:X\to[0,1]$ 连续, s.t. $f(A)\subset\{0\}$, $f(\mathscr{C}V)\subset\{1\}$ 且 $\forall\ a\in(0,1)$, $f^{-1}([0,a])$ 紧致 .

证 (1) $\forall\ x\in A\subset V$ $\exists\ G_x\in\mathscr{N}(x)$ s.t. G_x 紧致 . 由正则性又 $\exists\ U_x\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ s.t. $\overline{U}_x\subset\mathring{G}_x\cap V\subset\overline{G}_x$. 由于 $\overline{G}_x$ 紧致,故 $\overline{U}_x$ 紧致(如将正则性改成 Hausdorff, 则不必通过 G_x 而直接可得 U_x). 现在 $\mathscr{U}=\{U_x\mid x\in A\}$ 是 A 在 X 中的开覆盖,由 A 紧致,$\exists\ \{x_1,x_2,\cdots,$

$x_n\} \subset A$ s.t. $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. 令 $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$，便有 $U \in \tau, A \subset U$ 且 $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{x_i} \subset V, \overline{U}$ 紧致．

(2) 由(1)存在符合要求的U. 因局部紧的正则空间(或Hausdorff空间)是完全正则的，A 紧致，$\mathscr{C}U$ 是与 A 不相交的闭集，故由 A4.4.3 ∃ $f: X \to [0,1]$ 连续 s.t. $f(A) \subset \{0\}$, $f(\mathscr{C}U) \subset \{1\}$.

设 $a \in (0,1)$, 则 $f^{-1}([0,a]) \subset U \subset \overline{U}$. 由 f 的连续性知 $f^{-1}([0,a])$ 闭于 X，故也闭于 $\overline{U}$，从而紧致． □

5.2.4 设$\langle x,\tau\rangle$ 是局部紧的．证明 $G \in \tau \Leftrightarrow$ 对 X 的每个紧致子集 $C, G \cap C$ 开于 C.

证 "⇒" 显然．

"⇐" 设 $x \in G$，由局部紧性，∃ $C \in \mathscr{N}_X(x)$ s.t. C 紧致．于是由假设条件 $G \cap C$ 开于 C，而

$$G \cap \mathrm{Int}_X C = (G \cap C) \cap \mathrm{Int}_X C,$$

故 $G \cap \mathrm{Int}_X C$ 开于 $\mathrm{Int}_X C$，从而也开于 X，又 $x \in G \cap \mathrm{Int}_X C \subset G$，所以 $x \in \mathrm{Int}_X G$，即 $G \in \tau$. □

注 由 C4.3.9 可知，对于第一可数空间或局部紧空间的开集都具有上述特征．

5.2.5 由拓扑空间 X 到 Y 的映射 $f: X \to Y$，如果对 Y 的任一紧致子集在 f 下的原像是$\varnothing$或为 X 的紧致子集，则称 f 是正常的．证明由 X 到局部紧的 Hausdorff 空间 Y 的连续单射 $f: X \to Y$，如果是正常的，那么 f 是嵌入且 $f(X)$ 是 Y 的闭子集．

证 已知 $f: X \to f(X)$是一一的，连续的，要证 $f: X \to Y$ 是嵌入，只需证对于 X 的任一闭集 $F, f(F)$闭于 $f(X)$. 利用与上一题对偶的结果(C5.2.5)，证明对 Y 的任一紧致子集 C，有 $f(F) \cap C$ 闭于 C. 考虑

$$f^{-1}(f(F) \cap C) = f^{-1}f(F) \cap f^{-1}(C) = F \cap f^{-1}(C),$$

因为 $f^{-1}(C)$是 X 的紧致子集(或$\varnothing$)，故 $F \cap f^{-1}(C)$也是 X 的紧致子集(或$\varnothing$)，又

$$f(F \cap f^{-1}(C)) = ff^{-1}(f(F) \cap C) = f(F) \cap C,$$

故 $f(F) \cap C$ 是 Y 的紧致子集(或$\varnothing$). 从而闭于 Y，当然也闭于 C，于是 $f(F)$闭于 Y. 当然也闭于 $f(X)$. 从而 $f: X \to f(X)$为闭映射，故为同胚．即 $f: X \to Y$ 是嵌入．在上述证明中，让 $F = X$，即得 $f(X)$闭于 Y. □

5.2.6 证明有理数集 $\mathbf{Q}$ 作为 E^1 的子空间不是局部紧的．

证 因 $\mathbf{Q}$ 是 Hausdorff 的，若 $\mathbf{Q}$ 局部紧，则$\forall x \in \mathbf{Q}$ ∃ $U \in \mathscr{N}_{\mathbf{Q}}(x) \cap \tau_{\mathbf{Q}}$ s.t. $\mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}U$ 紧致．于是存在 $a<b$ 使 $x \in (a,b)$且$(a,b) \cap \mathbf{Q} \subset U$. 所以

$$[a,b] = \mathrm{Cl}_{E^1}((a,b) \cap \mathbf{Q}) \subset \mathrm{Cl}_{E^1}U,$$

$$[a,b] \cap \mathbf{Q} \subset (\mathrm{Cl}_{E^1}U) \cap \mathbf{Q} = \mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}U.$$

于是 $[a,b] \cap \mathbf{Q}$ 闭于 $\mathrm{Cl}_{\mathbf{Q}}U$，从而紧致．$[a,b] \cap \mathbf{Q}$ 也应是 E^1 的紧致子集，应闭于 E^1，但显然它不是 E^1 的闭集，这个矛盾就证明了 $\mathbf{Q}$ 不是局部紧的． □

5.2.7 证明切盘拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$(C4.3.4)不是局部紧的．

证 假定$\langle X,\tau\rangle$是局部紧的，则对 $O = \langle 0,0\rangle$ ∃ $G \in \mathscr{N}(O) \cap \tau$ s.t. $\overline{G}$ 紧致．于是 ∃ $\varepsilon > 0$ s.t. $B(\langle 0,\varepsilon\rangle,\varepsilon) \subset G$，($B(p,\varepsilon)$表示在 E^2 中的开球).

而$\overline{B(\langle 0,\varepsilon\rangle,\varepsilon)} \subset \overline{G}$(此处都是在 X 中取闭包). 故$\overline{B(\langle 0,\varepsilon\rangle,\varepsilon)}$紧致．而以$\langle 0,\varepsilon\rangle$为心，$\varepsilon$ 为半径的圆周 S 是$\overline{B(\langle 0,\varepsilon\rangle,\varepsilon)}$的闭子集，故也应是紧致的，然而 S 有一个无限子集，比如

$\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，其中$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$p_n=\langle x_n,\ \frac{2\varepsilon}{n}\rangle\in S\ (x_n=\frac{2\sqrt{n-1}}{n}\varepsilon)$，就没有聚点，引起矛盾．所以$\langle X,\tau\rangle$不是局部紧的． □

5.2.8　证明连续函数空间$\langle\mathscr{C}([0,1],E^1),\rho^*\rangle$不是局部紧的．

证　令　$\theta:[0,1]\to E^1$，$t\mapsto\theta(t)=0$．如果$\mathscr{C}([0,1],E^1)$局部紧，则$\exists\ U\in\mathscr{N}(\theta)\cap\tau_{\rho^*}$使$\overline{U}$紧致．于是$\exists\ \varepsilon>0$, s.t. $\overline{B_{\rho^*}(\theta,\varepsilon)}\subset\overline{U}$，故$\overline{B_{\rho^*}(\theta,\varepsilon)}$紧致．现定义$f_n:[0,1]\to E^1$为

$$f_n(t)=\begin{cases}-\varepsilon/2 & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n+1},\\ \varepsilon/2 & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1,\\ (\varepsilon/2)(2n(n+1)t-(2n+1)) & \frac{1}{n+1}\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}.\end{cases}$$

由粘合引理可见$\forall\ n$，f_n连续，且

$$\rho^*(f_n,\theta)=\max_{t\in[0,1]}|f_n(t)|<\varepsilon$$

即$f_n\in\overline{B_{\rho^*}(\theta,\varepsilon)}$．而当$i\neq j$时，$\rho^*(f_i,f_j)=\varepsilon$，故$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$无收敛的子序列，与$\overline{B_{\rho^*}(\theta,\varepsilon)}$的紧致性矛盾．所以$\langle\mathscr{C}([0,1],E^1),\rho^*\rangle$不是局部紧的． □

5.2.9　证明序数空间$[0,\Omega)$是局部紧的．

证　$\forall\ \alpha\in[0,\Omega)$，设$\beta$为$\alpha$的直接后继元，则$[0,\beta]$紧致且$\alpha\in[0,\beta)\in\mathscr{N}_{[0,\Omega)}(\alpha)$所以$[0,\beta]$是$\alpha$的紧致邻域．从而$[0,\Omega)$是局部紧的． □

5.2.10　设U为X的开集．证明：如果$\mathscr{A}$是X的紧致闭集族且$\bigcap\mathscr{A}\subset U$，则$\exists\ n\in\mathbf{N}$以及$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset\mathscr{A}$使$\bigcap_{i=1}^{n}A_i\subset U$.

证　分析　初看起来，这个问题不知从何下手，但通过取补运算，换成对偶的命题，就明朗了．取补后，$\bigcap\mathscr{A}\subset U$变成了$\mathscr{C}U\subset\bigcup\{\mathscr{C}A\mid A\in\mathscr{A}\}$．$\bigcap_{i=1}^{n}A_i\subset U$变成$\mathscr{C}U\subset\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}A_i$，与原命题对偶的命题是：如果$\mathscr{A}$是$X$的紧致闭集族，且$\{\mathscr{C}A\mid A\in\mathscr{A}\}$是$\mathscr{C}U$的开覆盖，那么它有有限子覆盖$\{\mathscr{C}A_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$．于是想到如果$\mathscr{C}U$是紧致的，那么结论肯定成立．而现在只知道$\mathscr{C}U$是闭的．由此自然就联想到要将$X$紧化．再根据$\mathscr{A}$中的元都是紧致闭集的特点自然就想到了一点紧化．可得如下的证明．

设　$X^*=X\cup\{\infty\}$为X的一点紧化，因U开于X，故U也开于X^*，于是$\mathscr{C}_{X^*}U=X^*-U$闭于X^*，从而$\mathscr{C}_{X^*}U$也紧致．由　$\bigcap\mathscr{A}\subset U$得$\mathscr{C}_{X^*}U\subset\bigcup\{\mathscr{C}_{X^*}A\mid A\in\mathscr{A}\}$，其中，每个$A\in\mathscr{A}$是$X$的紧致闭集，故$\mathscr{C}_{X^*}A$是$X^*$的开集．于是由$\mathscr{C}_{X^*}U$的紧致性即知$\exists\ n\in\mathbf{N}$及$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset\mathscr{A}$使$\mathscr{C}_{X^*}U\subset\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{C}_{X^*}A_i$．从而$\bigcap_{i=1}^{n}A_i\subset U$. □

注　学会正确的分析是寻求解题途径的有效的思维方法．

5.2.11　设Y为紧致 Hausdorff 空间，$y\in Y$．证明：如果$Y-\{y\}$同胚于某拓扑空间X，那么Y同胚于X的一点紧化X^*.

证　设　$f:Y-\{y\}\to X$是同胚映射．令$h:Y\to X^*$为

$$h(z)=\begin{cases}\infty & z=y,\\ f(z) & z\in Y-\{y\}.\end{cases}$$

显然 h 是一一的，且 $\forall z\in Y-\{y\}$ 以及 $V\in\mathscr{N}_{X^*}(h(z))$ 有 $V\cap X\in\mathscr{N}_X(f(z))$. 由 f 的连续性，$\exists U_1\in\mathscr{N}_{Y-\{y\}}(z)$ s.t. $f(U_1)\subset V\cap X\subset V$. 对于 U_1 又 $\exists U_2\in\mathscr{N}_Y(z)$ s.t. $U_1=U_2\cap(Y-\{y\})$，再由 Hausdorff 性质，$\exists U_3\in\mathscr{N}_Y(z)$ s.t. $y\notin U_3$. 则 $U_3\cap U_2\subset U_1$. 令 $U=U_3\cap U_2$ 就有 $U\in\mathscr{N}_Y(z)$ 且 $h(U)=f(U)\subset f(U_1)\subset V$. 这就证明了 h 在 z 处连续(注．这一段的证明不是多余的，不能简单地认为 $h|_{Y-\{y\}}=f$，由于 f 在每一点 $z\in Y-\{y\}$ 处连续，就一定有 h 在 z 处连续，可见 B1.6.23). 再证 h 在 y 处连续．$\forall U\in\mathscr{N}_{X^*}(\infty)$，不妨假定 $U\neq X^*$，则存在 X 的紧致闭集 F 使 $\infty\in X^*-F\subset U$. 于是 $f^{-1}(F)$ 是 $Y-\{y\}$ 的紧致子集，当然也是 Y 的紧致子集，而 Y 是 Hausdorff 的，所以也是 Y 的闭集，从而

$$V\overset{\text{def}}{=\!=\!=}Y-f^{-1}(F)\in\mathscr{N}_Y(y).$$

容易验证 $h(V)\subset U$. 所以 h 在 y 处连续．至此证明了 h 是连续的．

最后再证 $h^{-1}: X^*\to Y$ 连续．

$\forall x\in X$ 以及 $V\in\mathscr{N}_Y(h^{-1}(x))$，因 $h^{-1}(x)=f^{-1}(x)$，又

$$V\cap(Y-\{y\})\in\mathscr{N}_{Y-\{y\}}(f^{-1}(x)),$$

f^{-1}是连续的，故 $\exists U\in\mathscr{N}_X(x)\subset\mathscr{N}_{X^*}(x)$ s.t. $h^{-1}(U)=f^{-1}(U)\subset V$，即 h^{-1}在 x 处连续．

再证在∞处连续．$\forall V\in\mathscr{N}_Y(y)\cap\tau_Y$，$Y-V$ 紧致．因 $Y-V\subset Y-\{y\}$，故 $Y-V$ 也是 $Y-\{y\}$ 的紧致闭集．令 $U=X^*-f(Y-V)$. 由于 $f: Y-\{y\}\to X$ 是同胚，故 $f(Y-V)$是 X 的紧致闭集，从而 U 是∞的邻域．下面验证 $h^{-1}(U)\subset V$. 显然 $h^{-1}(\infty)=y\in V$. 当 $u\in U$ 且 $u\neq y$ 时，$h^{-1}(u)=f^{-1}(u)$. 若 $f^{-1}(u)\notin V$，则由 $U=X^*-f(Y-V)$ 可见 $u\notin U$. 所以 $f^{-1}(u)\in V$. 即 $h^{-1}(u)\in V$，因此 $h^{-1}(U)\subset V$. 至此证明了 h^{-1}连续，从而 h 是同胚． □

注　射影直线(即 $E^1\cup\{\infty\}$ 是 E^1 的一点紧化)与圆周同胚，复平面的一点紧化与球面 S^2 同胚，$\mathbf{N}$(作为 E^1 的子空间)的一点紧化与$\{0\}\cup\{\frac{1}{n}|n\in\mathbf{N}\}$(作为 E^1 的子空间)同胚都是本题的特例．

（二）常见错误分析

5.2.12　证明拓扑空间的局部紧性能被连续的开映射保持．

试对下述证明进行分析：

设$\langle X,\tau_X\rangle$为局部紧的拓扑空间，$\langle Y,\tau_Y\rangle$是拓扑空间，$f: X\to Y$ 为连续的开的满映射．

$\forall y\in Y$　$\exists x\in X$ s.t. $f(x)=y$，由于 X 是局部紧的，故 $\exists U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ s.t. U 紧致，则 $f(U)$紧致且 $f(U)\in\tau_Y$，于是 $f(U)$是 y 的紧致邻域，从而 Y 是局部紧的．

分析　正如这一部分开始时指出的，空间的局部紧性只说每一点有紧致邻域，而不是说有紧致开邻域！事实上，如 E^n 是局部紧的，每一点的球形邻域的闭包就是紧致邻域．但因 E^n 中的紧致子集等价于有界闭集，E^n 又不存在既开又闭的非空真子集．所以 E^n 的任何一点都不存在紧致开邻域．上述证明中断言 x 有紧致开邻域这是错误的．正确的证明应是：

$\forall y\in Y\ \exists x\in X$ s.t. $y=f(x)$. 由 X 局部紧，$\exists U\in\mathscr{N}_X(x)$ s.t. U 紧致．于是 $y\in f(\mathring{U})\subset f(U)$. 因为 f 为开映射故 $f(\mathring{U})\in\tau_Y$，于是 $f(U)\in\mathscr{N}_Y(y)$，由于 f 连续，所以 $f(U)$紧致．即 $f(U)$是 y 的紧致邻域，Y 是局部紧的． □

C 练习题

5.2.1 证明$\langle X,\tau\rangle$是局部紧的$\Leftrightarrow\forall x\in X\ \exists F\subset X$ s.t. F紧致且$x\in\mathring{F}$.

5.2.2 设$\langle X,\tau\rangle$是正则空间(或 Hausdorff 空间). 证明下述条件等价:

(1) X是局部紧的.

(2) X的每一点都有一个邻域其闭包是紧致的.

(3) $\langle X,\tau\rangle$有一个基$\mathscr{B}$,其中每个成员的闭包是紧致的.

(4) X的每一点都有一个开邻域其闭包是紧致的.

5.2.3 证明:如果$\langle X,\tau\rangle$是局部紧的正则空间(或 Hausdorff 空间),那么$\forall x\in X$

$$\mathscr{B}(x)=\{U\in\mathscr{N}(x)\mid U\text{ 是 }x\text{ 的紧致闭集}\}$$

是x的邻域基.

5.2.4 设X,Y为拓扑空间,Y是局部紧的. $f:X\to Y$是连续的,正常的. 证明X也是局部紧的.

5.2.5 设X是局部紧的. 证明:F闭于$X\Leftrightarrow$对于X的每个紧致子集C,$F\cap C$闭于C.

5.2.6 设$\langle X,\tau\rangle$是 Hausdorff 空间,如果X的子空间G是局部紧的,稠密的,证明$G\in\tau$.

5.2.7 设$\langle X,\tau\rangle$是局部紧的正则空间(或 Hausdorff 空间). 证明X的每个开子空间是局部紧的. 提示:利用 B5.2.2.

5.2.8 假定X不是紧致的. 证明X是局部紧的$\Leftrightarrow$由$\mathscr{S}=\{\mathscr{C}C\mid C\text{ 为 }X\text{ 的紧致子集}\}$生成的滤子$\mathscr{F}$, $\mathrm{Adh}\mathscr{F}=\varnothing$. (提示:参见 C4.3.12.)

5.2.9 证明 Hilbert 空间不是局部紧的.

5.2.10 证明实数的有界序列空间$\langle B,\rho\rangle$以及收敛序列空间$\langle C,\rho\rangle$(C1.1.2)都不是局部紧的.

5.2.11 证明实值有界函数空间$\mathscr{B}([0,1],\mathbf{R})$,取上确界度量,它不是局部紧的.

5.2.12 证明 Sorgenfrey 直线$\mathbf{R}_S$不是局部紧的.

5.2.13 设$\mathscr{A}$为 Hausdorff 空间$\langle X,\tau\rangle$的紧致子集族. 证明:如果$\mathscr{A}$中任意有限个成员之交是连通的,则$\bigcap\mathscr{A}$或为$\varnothing$,或是连通子集. 提示:利用 B5.2.10.

5.2.14 假定已知$\forall n,m\in\mathbf{N}$,当$n\neq m$时,S^n与S^m不同胚(注:这需要代数拓扑的知识加以证明). 证明E^n与E^m也不同胚.

5.2.15 设τ_D为$\mathbf{R}$上的离散拓扑,$\langle Y,\tau_Y\rangle$为 Fort 空间且$\mathrm{Card}Y=\mathrm{Card}\mathbf{R}$. 证明$\langle\mathbf{R},\tau_D\rangle$的一点紧化与$\langle Y,\tau_Y\rangle$同胚.

§5.3 分离性的小结与反例

A 补充与小结

由 C4.1.12 与 C4.1.15 知：

$\langle X,\tau\rangle$是正则的$\Leftrightarrow\forall\ x\in X$ 及不包含 x 的闭集 F，$\exists\ U,V\in\tau$ s.t. $x\in U$，$F\subset V$，且 $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$.

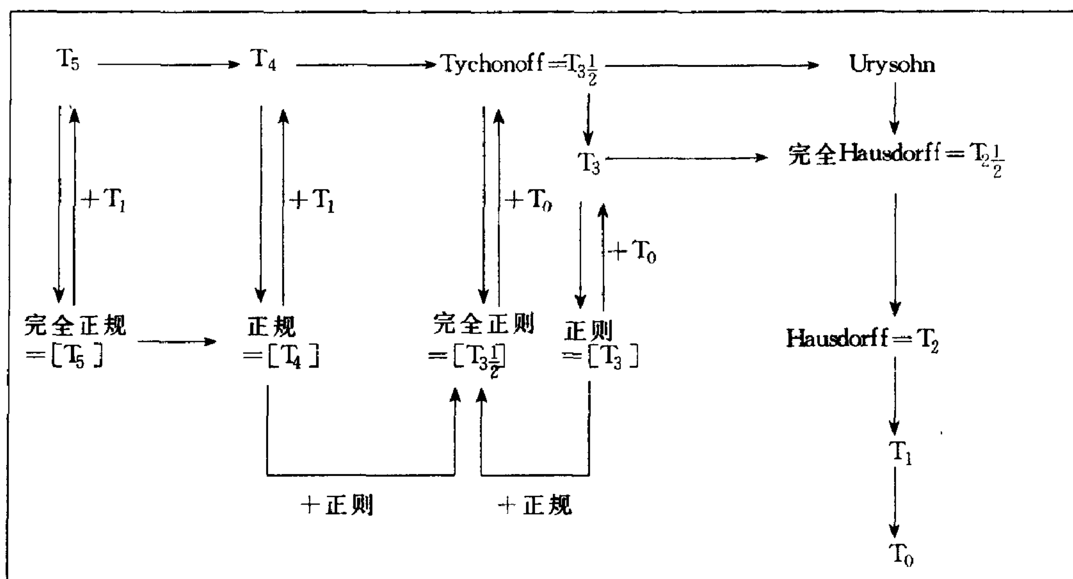
$\langle X,\tau\rangle$是正规的$\Leftrightarrow$对任意一对不相交的闭集 F_1,F_2，$\exists\ U,V\in\tau$ s.t. $F_1\subset U$，$F_2\subset V$ 且 $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$.

也就是说，在正则性公理（即$[T_3]$）与正规性公理（即$[T_4]$）的定义中关于点或闭集的开邻域可以用闭邻域来代替．但对于 Hausdorff 性质（即$[T_2]$）却不然．有例子表明，确有这样的 Hausdorff 空间，其中存在一对不同的点无不相交的闭邻域．因此我们可以引进一个新的分离公理．

5.3.1 定义　如果对于$\langle X,\tau\rangle$的任意两个不同的点，总存在分别包含它们的开集 U,V 使 $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$，则称$\langle X,\tau\rangle$是满足$[T_{2\frac{1}{2}}]$公理的，也叫$\langle X,\tau\rangle$是 $T_{2\frac{1}{2}}$空间或完全 Hausdorff 空间．

显然　T_3 空间$\Rightarrow T_{2\frac{1}{2}}$空间$\Rightarrow T_2$ 空间．

表 5.3.1



注　本表及以后所有表中"→"都表示蕴涵关系．

注意，我们用$[T_i]$这种带方括号的符号表示$[T_i]$公理本身，而不带方括号的T_i，当$i\leqslant 2\frac{1}{2}$时与$[T_i]$意义相同，当$i\geqslant 3$时T_i表示既满足$[T_i]$又满足$[T_1]$.

又完全正则空间能用连续函数分离点与不含该点的闭集，正规空间能用连续函数分离不相交的闭集，仿此我们可以引进下述新的分离公理．

5.3.2 定义　如果对于$\langle X,\tau\rangle$的任意两个不同的点x,y总存在连续映射$f:X\to[0,1]$使$f(x)=0$. $f(y)=1$. 则称$\langle X,\tau\rangle$是 Urysohn 空间，或称$\langle X,\tau\rangle$满足 Urysohn 公理．

显然，Tychonoff 空间⇒Urysohn 空间⇒完全 Hausdorff 空间．

现在我们可将分离性间的相互关系归纳小结成上述表 5.3.1.

注　$\langle X,\tau\rangle$叫做 perfectly 正规的⇔$\langle X,\tau\rangle$是正规的并且它的每个闭集都是G_δ集．

如果$\langle X,\tau\rangle$是 perfectly 正规的，T_1的就叫 perfectly T_4的．我们有下述

命题：如果$\langle X,\tau\rangle$是 perfectly 正规的，那么$\langle X,\tau\rangle$是完全正规的(即遗传正规的).

证　设S为X的任一子空间，F_1,F_2为S的两个不相交的闭集，则存在X的闭集F_1^*，F_2^*使$F_i=F_i^*\cap S(i=1,2)$. 由于X是 perfectly 正规的，所以X是正规的，且$F_i^*(i=1,2)$都是X的闭的G_δ集．由 C4.2.5(1)可知存在连续函数$g_i:X\to[0,1]$使$F_i^*=g_i^{-1}(\{0\})$. 令

$$h_i=g_i|_S:S\to[0,1],$$

则h_i连续．且$F_i=F_i^*\cap S=h_i^{-1}(\{0\})$, $i=1,2$.

由于$F_1\cap F_2=\varnothing$，可令$f:S\to[0,1]$为$\forall\, x\in S$

$$f(x)=\frac{h_1(x)}{h_1(x)+h_2(x)},$$

则f连续，且$f(F_1)\subset\{0\}$，$f(F_2)\subset\{1\}$. 所以S是正规的．这就证明了X是遗传正规(完全正规)的． □

由于这个命题，可知 perfectly T_4空间必为T_5空间，从而 perfectly T_4空间有时也叫T_6空间．

B　反例表与反例

表 5.3.2

T_0

T_1

T_2 = Hausdorff

$T_{2\frac{1}{2}}$ = 完全Hausdorff

$[T_3]$ = 正则

$[T_{3\frac{1}{2}}]$ = 完全正则

$[T_4]$ = 正规

$[T_5]$

1　4　12　8　15　9　13　6　2　11　16　10　14　3　5　7

表 5.3.3

T_0 1

T_1 4

Hausdorff $= T_2$ 12

完全 Hausdorff $= T_{2\frac{1}{2}}$ 19

T_3 15

Urysohn

Tychonoff $= T_{3\frac{1}{2}}$ 18 8

T_4 9

T_5 17 13

Perfeectly T_4 E

5.3.1（即表中的 1，余类推） 至少有两点的特殊点拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 仅仅是 T_0 的，非 T_1，非正则，非正规． □

5.3.2 至少有两点的特殊点拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$（p 为特殊点）的开扩张 $\langle X^*,\tau^*\rangle$，其中 $X^*=X\cup\{q\}$，$\tau^*=\tau\cup\{X^*\}$，$q\notin X$，它是 T_0 的，正规的，非 T_1 的，非完全正规的．

证 $\forall\ x,y\in X^*$ 且 $x\neq y$. 不妨设 $y=q$，则 x 的邻域 $\{x,p\}$ 不包含 y，故 $\langle X^*,\tau^*\rangle$ 是 T_0 的．由于 q 的唯一的邻域 X^* 总包含异于 q 的点，所以 X^* 不是 T_1 的．由于 X^* 的任意两个非空闭集总有一点 q 公共，所以 X^* 是正规的，但 X^* 的子空间 X 不是正规的，所以 X^* 不是完全正规的． □

5.3.3 奇偶拓扑空间 $\langle \mathbf{N},\tau\rangle$（B2.4.3）是完全正规的，正则的，但非 T_0 的．

证 因为 $\langle \mathbf{N},\tau\rangle$ 的开集与闭集等价，所以每个子空间中的开集与闭集也等价，因此每个子空间都是正规的，即 $\langle \mathbf{N},\tau\rangle$ 是完全正规的．

又 $\forall\ x\in\mathbf{N}$ 以及 $U\in\mathcal{N}(x)\cap\tau$，可取 $V=U$ 便有

$$x\in V\subset\overline{V}\subset V=U\subset U.$$

所以 $\langle \mathbf{N},\tau\rangle$ 是正则的．

而 $2n-1$ 与 $2n$ 这两点中任意一点的每个邻域总要包含另一点，所以 $\langle \mathbf{N},\tau\rangle$ 不是 T_0 的． □

5.3.4 可数无限集 X 取有限补拓扑 τ，则 $\langle X,\tau\rangle$ 是 T_1 的，非 T_2 的．

证 因为每个单点集都是闭集故为 T_1 的，但任意两个非空开集都相交，所以不是 T_2 的． □

5.3.5 不可数集 X，取可数补拓扑 τ，又设 $\{0,1\}$ 为平凡空间，则 $\langle X,\tau\rangle$ 与 $\{0,1\}$ 的积空间 $X^*=X\times\{0,1\}$ 叫做"点加倍"的可数补拓扑空间（以后总是称某个空间 X 与平凡的 $\{0,

1}的积空间为点加倍的 X). 现设 Y 为点加倍的可数补拓扑空间 X^* 的开扩张(参见 B5.3.2). 则 Y 是正规的,但非 T_0,非正则.

证　由 B5.3.2 的证明过程可知任意空间的开扩张都是正规的,所以 Y 正规,又 Y 的子空间 X^* 非 T_0,故 Y 也非 T_0.

现若 Y 正则,那么 X^* 也正则,于是由 C4.1.19, X 是正则的,又因 X 是 T_1 的,从而 X 也是 T_2 的,但 X 的任意两个非空开集都相交,故不能是 T_2 的,引起矛盾. 这就证明了 Y 非正则. □

5.3.6　序拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 是 T_5 的.

证　首先,每个单点集显然是闭集,所以是 T_1 的.

现设 A,B 为 X 的一对隔离的非空子集,令

$$A^*=\bigcup\{[a,b]\mid a,b\in A \text{ 且 } [a,b]\cap\overline{B}=\varnothing\},$$
$$B^*=\bigcup\{[a,b]\mid a,b\in B \text{ 且 } [a,b]\cap\overline{A}=\varnothing\}.$$

由于 $\forall\, a\in A$, $\{a\}=[a,a]$, 且 $[a,a]\cap\overline{B}=\varnothing$, 故 $A\subset A^*$, 同理 $B\subset B^*$,且不难证明 $A^*\cap B^*=\varnothing$.

现证 A^* 与 B^* 也是相互隔离的.

先证 $\overline{A^*}\subset A^*\cup\overline{A}$.

如果 $p\notin A^*\cup\overline{A}$,则存在包含 p 的开区间 (s,t) 使 $(s,t)\cap A=\varnothing$. 由此可推出 $(s,t)\cap A^*=\varnothing$. 事实上,若有 $a,b\in A$ 使 $[a,b]\cap\overline{B}=\varnothing$ 且 $[a,b]\cap(s,t)\neq\varnothing$, 则因 $(s,t)\cap A=\varnothing$, 必有 $a\leqslant s<t\leqslant b$, 这与 $p\notin A^*$ 矛盾, 所以 $(s,t)\cap A^*=\varnothing$. 从而 $p\notin\overline{A^*}$, 所以 $\overline{A^*}\subset A^*\cup\overline{A}$. 于是

$$\overline{A^*}\cap B^*\subset(A^*\cup\overline{A})\cap B^*=(A^*\cap B^*)\cup(\overline{A}\cap B^*)=\varnothing,$$

同理　$A^*\cap\overline{B^*}=\varnothing$, 即 A^* 与 B^* 相互隔离.

现将 A^* 与 B^* 分解为极大区间(包括退化的区间,即单点集,也包括如 $(a,\rightarrow)$, $[a,\rightarrow)$ $(\leftarrow,b)$ 与 $(\leftarrow,b]$ 那样的射线)之并,写成

$$A^*=\bigcup_{\alpha}A_\alpha,\qquad B^*=\bigcup_{\beta}B_\beta.$$

其中 A_α,B_β 是极大的区间.

下面证明可将每个 A_α,B_β 在 X 中向两侧扩张为互不相交的开区间.

先证任意两个 A_{α_1} 与 $A_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}\neq A_{\alpha_2})$ 之间有一个 B_β.

设 $x\in A_{\alpha_1}$, $y\in A_{\alpha_2}$, $x<y$, 则 $\exists\ \{a,b,c,d\}\subset A$ s.t. $[a,b]\cap\overline{B}=\varnothing$, $[c,d]\cap\overline{B}=\varnothing$, 且 $x\in[a,b]$, $y\in[c,d]$,若 A_{α_1} 与 A_{α_2} 之间没有 B_β,则 $[x,y]\cap B=\varnothing$,于是 $[x,y]\cap\overline{B}=\varnothing$,从而 $[a,d]\cap\overline{B}=\varnothing$. 故 $[a,d]\subset A^*$,从而 $\{a,d\}\subset A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}$ 与 $A_{\alpha_i}(i=1,2)$ 的极大性矛盾. 这便证明了所要的结论.

同理,任意两个 B_{β_1},B_{β_2} 之间有一个 A_α.

现设 S_α 为 A_α 的不在 A^* 中的上界的集合. 如果 $A_\alpha\cap\overline{S}_\alpha=\varnothing$,则令 $I_\alpha^+=\varnothing$;如果 $A_\alpha\cap\overline{S}_\alpha\neq\varnothing$, 设 $p_\alpha^+\in A_\alpha\cap\overline{S}_\alpha$, 则由 A^* 与 B^* 是相互隔离的可知, $p_\alpha^+\notin\overline{B^*}$. 故 $\exists\ x,y$ s.t. $p_\alpha^+\in(x,y)$ 且 $(x,y)\cap B^*=\varnothing$. 现记上述 y 为 h_α^+ 并令 $I_\alpha^+=[p_\alpha^+,h_\alpha^+)$. 则对于上述无论哪种情形都有 $I_\alpha^+\cap\overline{B^*}=\varnothing$.

类似地,设 T_α 为 A_α 的不在 A^* 中的下界的集合,当 $A_\alpha\cap\overline{T}_\alpha=\varnothing$ 时,令 $I_\alpha^-=\varnothing$; 当 $A_\alpha\cap$

$\overline{T}_\alpha \neq \varnothing$时，设 $p_\alpha \in A_\alpha \cap \overline{T}_\alpha$，则有 h_α^- 使 $I_\alpha^- = (h_\alpha^-, p_\alpha]$，并且不管哪种情形总有 $I_\alpha \cap \overline{B^*} = \varnothing$.

对 B_β 同样的去做，相应地记为 J_β^-, J_β^+. 当 J_β^-, J_β^+ 非空时，相应地有 $J_\beta^- = (k_\beta^-, q_\beta]$，$J_\beta^+ = [q_\beta, k_\beta^+)$，并有 $J_\beta^+ \cap \overline{A^*} = \varnothing$，$J_\beta^- \cap \overline{A^*} = \varnothing$.

由于每两个 $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}$ 之间有一个 B_β，每两个 B_{β_1}, B_{β_2} 之间有一个 A_α，所以一个 I_α^+ (I_α^-) 至多与一个 J_β^- (J_β^+) 相交.

下面对所作的 I_α^+，I_α^-，J_β^+，J_β^- 进行如下必要的修正，使之互不相交：

如果有某个 I_α^+ 与 J_β^- 相交，设 $z \in I_\alpha^+ \cap J_\beta^- = [p_\alpha^+, h_\alpha^+) \cap (k_\beta^-, q_\beta^-]$，则以 $[p_\alpha^+, z)$ 代替 $[p_\alpha^+, h_\alpha^+)$，以 $(z, q_\beta^-]$ 代替 $(k_\beta^-, q_\beta^-]$，就有 $I_\alpha^+ \cap J_\beta^- = \varnothing$（对新的）. 若有 I_α^- 与 J_β^+ 相交，作类似的修改. 现在我们假定下面出现的 $I_\alpha^+, I_\alpha^-, J_\beta^+, J_\beta^-$ 都已作过这种修正. 现在，我们令

$$U_\alpha = I_\alpha^- \cup A_\alpha \cup I_\alpha^+, \quad V_\beta = J_\beta^- \cup B_\beta \cup J_\beta^+.$$

则 U_α, V_β 均为开集，且每个 U_α 与任一 V_β 都不相交. 最后再令

$$U = \bigcup_\alpha U_\alpha, \qquad V = \bigcup_\beta V_\beta.$$

则 $U, V \in \tau$ 且 $A \subset A^* \subset U$，$B \subset B^* \subset V$，$U \cap V = \varnothing$. 这就证明了 $\langle X, \tau \rangle$ 是完全正规的，也是 T_5 的. □

5.3.7 区间套拓扑空间：$X = (0,1)$，

$$\tau = \{G_n | G_n = (0, 1 - \frac{1}{n}),\ n \in \mathbf{N}, n > 1\} \cup \{\varnothing, X\}.$$

$\langle X, \tau \rangle$ 是完全正规的，但非 T_0 的，非正则的.

证 因为每个非空开集都同时包含 $\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$，所以 X 非 T_0，又包含闭集 $[\frac{1}{2}, 1)$ 的任一开集都包含 $\frac{1}{4}$，所以 X 非正则. 由于任一非空子集 S 的闭包总包含大于 $\inf S$ 的所有点，故不存在非空的相互隔离的子集对. 从而自然地是完全正规的. □

5.3.8 半盘拓扑空间 $X = P \cup L$，其中

$$P = \mathbf{R} \times (0, +\infty), \quad L = \mathbf{R} \times \{0\};$$

每一点 $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ 的开邻域基

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{B(x,\varepsilon) \cap P \mid \varepsilon > 0\} & x \in P, \\ \{(B(x,\varepsilon) \cap P) \cup \{x\} \mid \varepsilon > 0\} & x \in L. \end{cases}$$

此处 $B(x,\varepsilon)$ 是 x 在 E^2 中的球形邻域. 相应的拓扑记为 τ. 则 $\langle X, \tau \rangle$ 是完全 Hansdorff 的，Urysohn 的，非正则的，亦非正规的.

证 因 X 的半盘拓扑 τ 大于 X 作为 E^2 的子空间拓扑，而 X 作为 E^2 的子空间是 T_5 的，当然是 Urysohn 的，从而 $\langle X, \tau \rangle$ 也是 Urysohn 的，因此也是完全 Hansdorff 的.

任取 $x \in L, U \in \mathscr{B}(x)$，则 $U \in \tau$. 假定 $\exists\ V \in \tau$ s.t. $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. 由于对 V，$\exists\ \varepsilon > 0$ s.t.

$$B \xlongequal{\text{def}} (B(x,\varepsilon) \cap P) \cup \{x\} \subset V$$

则 $\overline{B} \subset \overline{V} \subset U$，显然 $\langle x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, 0 \rangle \in \overline{B}$，但 $\langle x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, 0 \rangle \notin U$，其中 x_1 为 x 的第一坐标，这就表明 $\langle X, \tau \rangle$ 不是正则的. 从而也就不是 T_3 的，不是正规的. □

5.3.9　切盘拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$是完全正则的 T_1 的，非正规的．

证　由切盘拓扑的定义(C4.3.4)可见每个单点集都是闭集，故$\langle X,\tau\rangle$是 T_1 的．

$\forall\, x\in X$ 以及不包含 x 的非空闭集 F，存在 $U\in\mathscr{B}(x)$ （$\mathscr{B}(x)$的定义见 C4.3.4) s.t. $x\in U\subset\mathscr{C}F$. 令

$$f: X\to[0,1]\text{ 为}$$

$$f(y)=\begin{cases}0 & y=x,\\ 1 & y\in\mathscr{C}U,\\ \dfrac{\|x-y\|}{\|x-y'\|} & y\in U-\{x\}.\end{cases}$$

其中 y'是射线$\overrightarrow{xy}$与 $\mathrm{Bd}U$ 的交点．易见$f(x)=0$，$f(F)\subset f(\mathscr{C}U)=\{1\}$. 至于 f 的连续性可证明如下：

当 $x\in P$ 时，$\forall\, a\in(0,1]$，$b\in[0,1)$，

$$f^{-1}([0,a))=B(x',a\varepsilon)\in\tau,$$
$$f^{-1}((b,1])=\mathscr{C}(\overline{B(x,b\varepsilon)})\in\tau.$$

其中 ε 为U 的半径，$\overline{B(x,b\varepsilon)}=\mathrm{Cl}_X B(x,b\varepsilon)$.

当 $x=\langle x_1,0\rangle\in L$ 时，

$$f^{-1}([0,a))=B(x,a\varepsilon)\cup\{x\}\in\tau,$$
$$f^{-1}((b,1])=\mathscr{C}(\overline{B(x'',b\varepsilon)})\in\tau,$$

其中，$x'=\langle x_1,a\varepsilon\rangle$，$x''=\langle x_1,b\varepsilon\rangle$. 至此证明了 f 是连续的．从而 X 是完全正则的．

现在证明 X 非正规．因为 L 是 X 的离散的闭子空间，所以定义在 L 上的任一映射 $f: L\to[0,1]$都连续．其总数为 $\mathrm{Card}[0,1]^L=c^c=(2^{\aleph_0})^c=2^{\aleph_0 c}=2^c$(其中 $c=2^{\aleph_0}$). 如果 X 正规，则由 Tietze 扩张定理，$\forall\, f: L\to[0,1]$都可连续地扩张到 X 上．因此由 X 到$[0,1]$的连续映射至少有 2^c 个．但另一方面，X 有一个可数的稠密子集 $D=P\cap(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})$，因此由 B4.1.5(2) 可知由 X 到$[0,1]$的连续映射的个数不大于由 D 到$[0,1]$的连续映射的个数．更不大于$\mathrm{Card}\,[0,1]^D=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=c$. 而 $c<2^c$，这就导致矛盾，所以 X 非正规．　□

5.3.10　点加倍的切盘拓扑空间 $X\times\{0,1\}$，其中 X 是切盘拓扑空间，$\{0,1\}$是平凡空间，它是完全正则的，非 T_0 的，非正规的．

证　因 X 完全正则，平凡空间$\{0,1\}$没有不包含 0 与不包含 1 的非空闭集，故自动地是完全正则的，所以积空间 $X\times\{0,1\}$也是完全正则的(C4.2.3).

现若 $X\times\{0,1\}$是正规的，因对 X 的任意两个不相交的闭集 A,B 有 $A\times\{0,1\}$与 $B\times\{0,1\}$是 $X\times\{0,1\}$的两个不相交的闭集，故存在 $X\times\{0,1\}$的两个不相交的开集 $U\times\{0,1\}$，$V\times\{0,1\}$使

$$A\times\{0,1\}\subset U\times\{0,1\},\quad B\times\{0,1\}\subset V\times\{0,1\},$$

其中 U,V 是 X 的开集．由此可得 U,V 是 X 中分别包含 A,B 的两个不相交的开集，这表明 X 也是正规的，但我们已知 X 不是正规的，所以 $X\times\{0,1\}$不是正规的．　□

5.3.11　Hjalmar Ekdal 拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$：其中

$$X=\mathbf{N},\ \tau=\{G\subset X\mid \text{若 } 2k-1\in G,\ \text{则 } 2k\in G, k\in\mathbf{N}\}.$$

$\langle X,\tau\rangle$是 T_0 的完全正规的，但非 T_1 的，也非正则的．

证　$\forall x,y\in X$ 且 $x\neq y$，若 x,y 中有一个比如 x 为偶数，则$\{x\}$是包含 x 而不包含 y 的开集．如果 x、y 都是奇数，则$\{x,x+1\}$是包含 x 不包含 y 的开集．所以$\langle X,\tau\rangle$是 T_0 的．

但奇数 $2k-1$ 的任一邻域总要包含 $2k$，所以 X 不是 T_1 的．

又包含闭集$\{2k-1\}$的任一开集总包含 $2k$，故 X 非正则的．□

5.3.12　无理斜坡拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$：

$$X=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \mathbf{Q},\ y\geqslant 0\}.$$

设 θ 为一固定的无理数，

$$\forall\ \langle x,y\rangle\in X,\varepsilon>0,\ 令$$

$$U_\varepsilon(\langle x,y\rangle)=\{\langle x,y\rangle\}\cup B_\varepsilon(x+y/\theta)\cup B_\varepsilon(x-y/\theta),$$

其中 $B_\varepsilon(\zeta)=\{r\in\mathbf{Q}\mid \zeta-\varepsilon<r<\zeta+\varepsilon\}$，即每个 $U_\varepsilon(\langle x,y\rangle)$是由$\langle x,y\rangle$加上 x 轴上两个中心分别在 $x\pm y/\theta$ 半径为 ε 的区间中的有理数，这两个中心到$\langle x,y\rangle$的连线的斜率分别为$\pm\theta$.

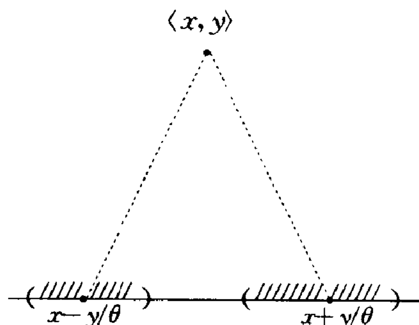


图　5.3.1

拓扑 τ 就是由$\{U_\varepsilon(\langle x,y\rangle)\mid\varepsilon>0\}$为相应点$\langle x,y\rangle$的(开)邻域基生成的．$\langle X,\tau\rangle$是 Hausdorff 的而非完全 Hausdorff 的．

证　由于 θ 为无理数，于是在每条斜率为 θ（或 $-\theta$）的直线上至多有一个点属于 X，因此，X 中任意两个不同的点 p,q 沿着斜率为$\pm\theta$ 的直线投射到 x 轴上必然得到两个不同的无理点对，故 p,q 有不相交的邻域，因此$\langle X,\tau\rangle$是 Hausdorff 的．

再证$\langle X,\tau\rangle$不是完全 Hausdorff 的．

容易看出任意一点$\langle x,y\rangle\in X$ 的每个邻域基成员 $U_\varepsilon(\langle x,y\rangle)$的闭包，包含从 $B_\varepsilon(x-y/\theta)$与 $B_\varepsilon(x+y/\theta)$的点发出的斜率为$\pm\theta$ 的射线构成的 4 个（当 $y=0$ 时为两个）带

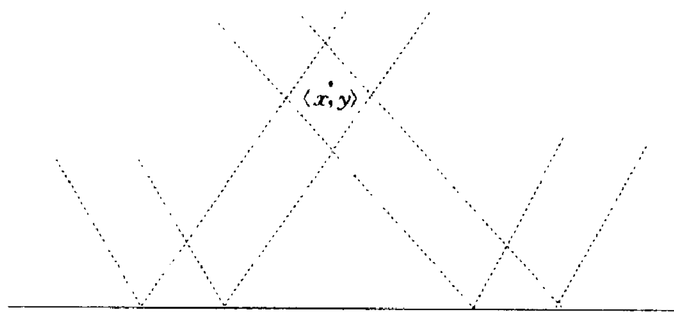


图 5.3.2(1)

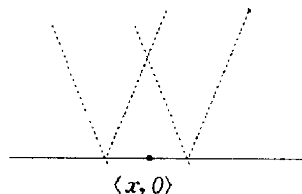


图 5.3.2(2)

形区域中属于 X 的点的并（如图），原因是 X 中在这几个区域内每一点沿着斜率为$\pm\theta$ 的直线投射到 x 轴上的有理数正好落在 $B_\varepsilon(x-y/\theta)$或 $B_\varepsilon(x+y/\theta)$之内，这就表明 X 中位于这几个区域内的任一点的每个邻域基的成员总要与$U_\varepsilon(\langle x,y\rangle)$相交．由这一事实可见 X 的任意两个非空开集的闭包必定相交，因此$\langle X,\tau\rangle$不是完全 Hausdorff 的．□

5.3.13　Tychonoff 平面 $T=[0,\Omega]\times[0,\omega]$，其中 ω 是第一无限序数，Ω 是第一不可数

序数．T 是 T_4 的，非完全正规的．

证　因$[0,\Omega]$与$[0,\omega]$作为序拓扑空间都是紧致的，Hausdorff 的．所以积空间也是紧致 Hausdorff 的，从而是 T_4 的．

现在考虑子空间 $T_\infty=T-\{\langle\Omega,\omega\rangle\}$．令

$A=\{\langle\Omega,n\rangle\,|\,0\leqslant n<\omega\}$，

$B=\{\langle\beta,\omega\rangle\,|\,0\leqslant\beta<\Omega\}$.

则 A,B 是 T_∞ 的不相交的闭子集．

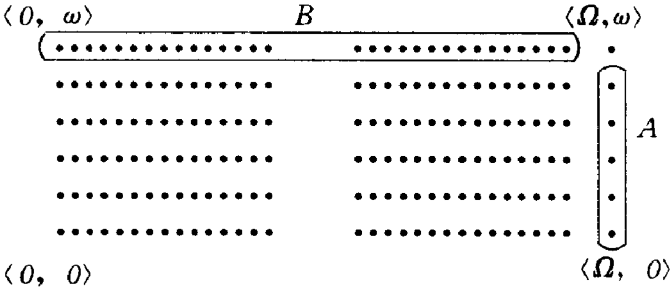


图　5.3.3

假定 U 是 T_∞ 中包含 A 的开集，则$\forall\ \langle\Omega,n\rangle\in A\ \exists\ \alpha_n<\Omega$ s.t. $(\alpha_n,\Omega]\times\{n\}\subset U$. 由于 $\{\alpha_n\,|\,n<\omega\}$可数，故$\exists\ \alpha$ 为$\{\alpha_n\,|\,n<\omega\}$的上界且 $\alpha<\Omega$，则

$$(\alpha,\Omega]\times[0,\omega)\subset U.$$

由于 Ω 有不可数个先行元，而 α 仅有可数个先行元，所以 $\alpha+1<\Omega$，则$\langle\alpha+1,\omega\rangle\in B$.

再设 V 是 T_∞ 中包含 B 的开集，则$\exists\ n<\omega$ s.t. $\{\alpha+1\}\times(n,\omega]\subset V$. 从而$\langle\alpha+1,n+1\rangle\in U\cap V$. 这就表明 T_∞ 中分别包含 A 与 B 的任意一对开集总要相交，所以 T_∞ 不是正规的，也就是 T 不是完全正规(遗传正规)的．□

5.3.14　点加倍的 Tychonoff 平面 $X=T\times\{0,1\}$，其中 T 为 Tychonoff 平面．X 是正则的，正规的，非 T_0 的，非完全正规的．

证　容易验证 X 的任一闭集 F 总可写成 $F=F_1\times\{0,1\}$，其中 F_1 为 T 的闭集．因此可设 $A=A_1\times\{0,1\}$，$B=B_1\times\{0,1\}$为 X 的任意两个不相交的闭集，其中 A_1,B_1 为 T 的两个不相交的闭集，由于 T 是正规的，故存在 T 的不相交的开集 U,V 使 $A\subset U,B\subset V$. 于是 $U\times\{0,1\}$，$V\times\{0,1\}$就是分别包含 A,B 的 X 的两个不相交的开集．所以 X 是正规的．

同理，由于 T 正则可得 X 是正则的．

由 B5.3.10 的证明过程可知，如果 $T_\infty\times\{0,1\}$是正规的，那么 T_∞ 也正规，而已知 T_∞ 不是正规的，所以 $T_\infty\times\{0,1\}$不是正规的，也就是 X 不是完全正规的．X 不是 T_0 则显然．□

5.3.15　改制的 M－Z(Montgomery，Zippin)空间：令

$$L_m=\{m\}\times[-1,0]，其中\ m\ 为偶数;$$

$$C_{n,k}=\left(\{n+1-\frac{1}{k},n-1+\frac{1}{k}\}\times[-1,0]\right)\cup\left\{\langle x,y\rangle\,|\,(x-n)^2+y^2=(1-\frac{1}{k})^2,\ y\geqslant 0\right\},$$

$$p_{n,k}=\langle n,1-\frac{1}{k}\rangle，上述\ n\ 为奇数，k\geqslant 2;$$

$$X=(\bigcup_m L_m)\cup(\bigcup_{n,k}C_{n,k})\cup\{a,b\},$$

其中 $a,b\notin(\bigcup_m L_m)\cup(\bigcup_{n,k}C_{n,k})$，为 X 的理想点．

$\mathscr{B}$ 为下述 4 类集合之全体：

（Ⅰ）X 与不包含任一 $p_{n,k}$ 的水平开线段之交；

（Ⅱ）对每个固定的 n,k，从集合 $C_{n,k}$ 中删去除半圆顶点外的有限多个点构成的集合；

（Ⅲ）$U_m(a)=\{a\}\cup\{\langle x,y\rangle\in X\mid x<m\}$，$m$ 为偶数；

（Ⅳ）$U_m(b)=\{b\}\cup\{\langle x,y\rangle\in X\mid x>m\}$，$m$ 为偶数．

由 $\mathscr{B}$ 为拓扑基生成 X 的拓扑 τ. 称空间 $\langle X,\tau\rangle$ 为改制的 M－Z 空间．$\langle X,\tau\rangle$ 是 T_3 的，非 Urysohn 的，从而也非完全正则的．

证　(1)　由定义易见 $\mathscr{B}$ 中（Ⅰ），（Ⅱ）两类元素都是既开又闭的．

(2)　每个单点集都是闭集，所以 $\langle X,\tau\rangle$ 是 T_1 的．

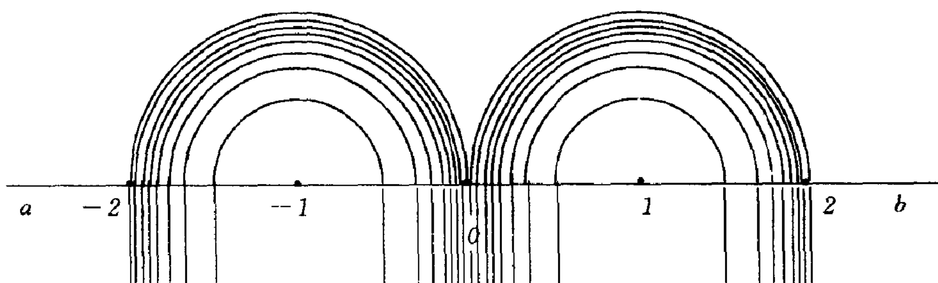


图　5.3.4

(3)　再证 $\langle X,\tau\rangle$ 是正则的，从而是 T_3 的．

$$\forall\ p=\langle x,y\rangle\in X \text{ 以及任一 } V\in\mathscr{B}\ \text{s.t.}\ p\in V.$$

1° 若 $p\in L_m\cup C_{n,k}$，则有 U 或为第（Ⅰ）类，或为第（Ⅱ）类的，使 $p\in U\subset V$，故有 $p\in U\subset \overline{U}=U\subset V$.

2° 若 $p=a$，则可设 $V=U_m(a)$，于是

$$p\in U_{m-2}(a)\subset\overline{U_{m-2}(a)}\subset U_m(a)=V.$$

3° 若 $p=b$，则与 $p=a$ 类似．

综合 1°—3° 可知 $\langle X,\tau\rangle$ 是正则的．

(4)　$\langle X,\tau\rangle$ 不是 Urysohn 的，从而也就不是完全正则的．

设 $f: X\to[0,1]$ 连续．$\forall\ c\in[0,1]$，因

$$\{c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left((c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n})\cap[0,1]\right),$$

故有

$$f^{-1}(\{c\})=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left((c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n})\cap[0,1]\right),$$

即 $f^{-1}(\{c\})$ 是 G_δ 集．令

$$S_{n,k}=\{p\in C_{n,k}\mid f(p)\neq f(p_{n,k})\}.$$

任意取定一个 $S_{n,k}$，设 $c=f(p_{n,k})$，$f^{-1}(\{c\})=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$，其中 G_i 为包含 $p_{n,k}$ 的开集．于是存在

$C_{n,k}$的有限子集 F_i s. t. $p_{n,k}\in C_{n,k}-F_i\subset G_i$.

$$S_{n,k}=C_{n,k}-\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(C_{n,k}-G_i)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i.$$

所以 $S_{n,k}$为可数集．于是$\bigcup_{n,k}S_{n,k}$也可数．从而$\exists\ d\in[-1,0]$ s. t. 直线$\{\langle x,y\rangle\mid y=d\}$与所有$S_{n,k}$都不相交．所以$\forall\ n,k$

$$f(p_{n,k})=f(\langle n-1+\frac{1}{k},d\rangle)=f(\langle n+1-\frac{1}{k},d\rangle),$$

于是，

$$f(\langle n-1,d\rangle)=\lim_{k\to\infty}f(p_{n,k})=f(\langle n+1,d\rangle),$$

从而对每个偶数 m，

$$f(\langle m,d\rangle)=f(\langle 0,d\rangle).$$

由此可得

$$f(a)=\lim_{m\to-\infty}f(\langle m,d\rangle)=f(\langle 0,d\rangle),$$

$$f(b)=\lim_{m\to+\infty}f(\langle m,d\rangle)=f(\langle 0,d\rangle),$$

$$f(a)=f(b).$$

这就证明了$\langle X,\tau\rangle$不是 Urysohn 的，从而也就不是完全正则的．□

5.3.16　点加倍的改制 M－Z 空间：$X^*=X\times\{0,1\}$，其中 X 为改制 M－Z 空间，X^*是正则的而非 T_0 的．

证　如同 B5.3.14. □

5.3.17　(1) 不可数的 Fort 空间$\langle X\tau\rangle$是 T_5 的，却不是 perfectly T_4 的．

(2) 序数空间$[0,\Omega]$也是 T_5 的而不是 perfectly T_4 的．

证　(1)　记 $\tau=\{G\subset X\mid p\notin G$ 或 $\mathscr{C}G$ 有限$\}$.

由于每个单点集都是闭集，所以$\langle X,\tau\rangle$是 T_1 的．

设 A,B 为 X 的一对隔离子集，如果 $p\in A$，则 $\overline{A}=A$，于是 $p\notin B$，故 B 为开集．我们证明此时 $\mathscr{C}B$ 也是开集，若 $\mathscr{C}B$ 不是开集，因 $\mathscr{C}B$ 已经包含 p，故必有 $B=\mathscr{C}(\mathscr{C}B)$是无限集．而对任一包含 p 点的开集 U，$\mathscr{C}U$ 有限，故 $U\cap B\neq\varnothing$，即 $p\in\overline{B}$，从而 $p\in A\cap\overline{B}$，与 A，B 相互隔离的条件矛盾，所以 $\mathscr{C}B$ 也是开集．又 $A\subset\mathscr{C}B$. 从而有不相交的开集 $\mathscr{C}B$ 与 B 分别包含 A 与 B. 如果 A,B 都不包含 p，则 A,B 本身都是开集．所以 $\langle X,\tau\rangle$ 是完全正规的．

由于每个包含 p 点的开集，其补集有限，所以任意可数多个包含 p 点的开集 $G_n(n\in\mathbf{N})$之交$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\mathscr{C}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n)$，当 X 不可数时，$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 就不可数．从而$\{p\}$是闭集但不是 G_δ 集．所以不可数的 Fort 空间$\langle X,\tau\rangle$不是 Perfectly T_4 的．

(2)　$[0,\Omega]$作为序拓扑空间当然是 T_5 的．

对于包含 Ω 的任一可数的开集族$\{G_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，存在基元素族$\{(\alpha_n,\Omega]\}_{n\in\mathbf{N}}$ s. t. $\forall\ n,(\alpha_n,\Omega]\subset G_n$，且 $\beta\overset{\text{def}}{=\!=}\sup\{\alpha_n\mid n\in\mathbf{N}\}<\Omega$. 于是$(\beta,\Omega]\subset\bigcap_{n\in\mathbf{N}}G_n$，即$\{\Omega\}\neq\bigcap_{n\in\mathbf{N}}G_n$. 所以闭集$\{\Omega\}$不是 G_δ 集，从而$[0,\Omega]$不是 perfectly T_4 的．□

5.3.18　改制 M－Z 空间$\langle X,\tau\rangle$的子空间 $S=X-\{a\}$是 Urysohn 的，T_3 的，非完全正

则的．

证 (1) $\forall p_1, p_2 \in S$ 且 $p_1 \neq p_2$，必有一点比如 $p_1 \neq b$，于是 p_1 必属于某个 L_m 或属于某个 $C_{n,k}$. 于是就有 $\mathscr{B}$ 中第(Ⅰ)类或第(Ⅱ)类的元素 U 包含 p_1 而不包含 p_2. U 是 X 的既开又闭的子集，也是 S 的既开又闭的子集，于是 U 的特征函数 $f: U \to [0,1]$(即当 $x \in U$ 时 $f(x)=1$，$x \in S-U$ 时 $f(x)=0$)是连续的，且 $f(p_1)=1$，$f(p_2)=0$. 所以 S 是 Urysohn 的．

(2) 因 X 是 T_3 的，所以 S 也是 T_3 的．

(3) 考虑基 $\mathscr{B}$ 中包含 b 点的任一元素 $U_m(b)$，$\mathscr{C}U_m(b)$是不包含 b 的闭集，而任一连续映射 $f: S \to [0,1]$，如 B5.3.15 同样的论证可知，$f(\langle m-2, d\rangle)=f(b)$，而 $\langle m-2, d\rangle \in \mathscr{C}U_m(b)$，所以不存在使 $\mathscr{C}U_m(b)$上取值为 1，在 b 处取值为 0 的连续函数，故 S 不是完全正则的． □

5.3.19 Roy 点阵空间 $\langle X, \tau\rangle$：

设 $\{C_i\}_{i\in \mathbf{N}}$ 为有理数集 $\mathbf{Q}$ 的不相交的稠密子集的可数族(稠密性是相对于 E^1 而言的).

$$X = \{\langle r, i\rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{N} \mid r \in C_i\} \cup \{\infty\}, \ \infty \text{ 为理想点．}$$

令

$\mathscr{B}(\langle r, 2n\rangle)=\{U_\varepsilon(\langle r, 2n\rangle) \mid \varepsilon>0\}$，其中 $U_\varepsilon(\langle r, 2n\rangle)=\{\langle t, 2n\rangle \in X \mid r-\varepsilon<t<r+\varepsilon\}$；$\mathscr{B}(\langle r, 2n-1\rangle)=\{V_\varepsilon(\langle r, 2n-1\rangle) \mid \varepsilon>0\}$，

其中 $V_\varepsilon(\langle r, 2n-1\rangle)=\{\langle t, m\rangle \in X \mid r-\varepsilon<t<r+\varepsilon, m=2n-2, 2n-1, 2n\}$；

$\mathscr{B}(\infty)=\{W_n(\infty) n \in \mathbf{N}\}$，

其中 $W_n(\infty)=\{\langle s, i\rangle \in X \mid i \geqslant 2n\}$.

拓扑 τ 由每个 $\mathscr{B}(p)(p \in X)$为相应点 p 的开邻域基所生成. $\langle X, \tau\rangle$叫做 Roy 点阵空间，它是完全 Hausdorff 的，非 T_3 的，也非 Urysohn 的．

图 5.3.5

证 (1) 设 $p, q \in X$ 且 $p \neq q$.

(i) 设 $p=\langle r, l\rangle$，$q=\langle s, k\rangle$，则 $r \neq s$. 让 $\varepsilon=\frac{1}{3}|r-s|$，就有 $U_\varepsilon(p)$(或 $V_\varepsilon(p)$)的闭包与 $U_\varepsilon(q)$(或 $V_\varepsilon(q)$)的闭包不相交．

(ii) 设 $p=\langle r, l\rangle$，$q=\infty$，则任取 $U_\varepsilon(p)$(或 $V_\varepsilon(p)$)，再取 $W_{l+1}(\infty)$，就有$\overline{U_\varepsilon(p)} \cap \overline{W_{l+1}(\infty)}=\varnothing$.

所以$\langle X, \tau\rangle$是完全 Hausdorff 的．

(2) 为了证明$\langle X, \tau\rangle$不是 Uryshn 的，先证$\langle X, \tau\rangle$是连通的．

设 A 为 X 的既开又闭的子集，不妨假定$\infty \in A$(否则$\infty \notin A$，必有$\infty \in \mathscr{C}A$，而 $\mathscr{C}A$ 也是既开又闭的)，于是有某个 $W_n(\infty) \subset A$. 因 A 也是闭的，故 A 必定包含标号为 $2n-1$ 的水

平直线中所有 X 的点，又因 A 是开的，所以 A 又包含标号为 $2n-2$ 的水平直线中所有 X 的点，以此类推，就得 $A=X$. 所以 X 没有既开又闭的非空真子集，故 X 连通．

如果 X 是 Urysohn 的，则 $\forall\ p,q\in X$ 且 $p\neq q$，存在 $f: X\to[0,1]$ 连续使 $f(p)=0$, $f(q)=1$. 由介值定理即得 $f(X)=[0,1]$，这与 X 是可数集矛盾．所以 X 不是 Urysohn 的．

(3) 考虑点 $\langle r,4\rangle\in X$ 以及包含 $\langle r,4\rangle$ 的开集 $U_\varepsilon(\langle r,4\rangle)$，由于 $\langle r,3\rangle\in\overline{\{\langle r,4\rangle\}}$，但 $\langle r,3\rangle\notin U_\varepsilon(\langle r,4\rangle)$，所以不存在开集 V 使

$$\langle r,4\rangle\in V\subset\overline{V}\subset U_\varepsilon(\langle r,4\rangle)$$

成立．从而 $\langle X,\tau\rangle$ 不是正则的．也就不是 T_3 的． □

§5.4 不连通性与分离性

空间的连通性是在某种意义上的“不可分割性”，而“可分割”的极端情形无疑是离散空间．离散空间又满足所有的分离公理，即是所有分离性质的极端情形，这就自然会想到从不同的角度揭示的空间的“分割性”与“分离性”之间是否存在着某种联系．本节就介绍几种不连通性并讨论它们与分离性的关系．

A 定义与有关命题

5.4.1 定义 如果 $\langle X,\tau\rangle$ 的每个道路连通分支都是单点集，则说 X 是全不道路连通的；如果 X 的每个连通分支都是单点集，则说 X 是全不连通的；如果 X 的每个拟连通分支(B2.1.14)都是单点集，则称 X 是全分离的．

5.4.2 命题 (1) X 全分离$\Rightarrow X$ 全不连通$\Rightarrow X$ 全不道路连通．

(2) X 全不连通$\Rightarrow X$ 是 T_1 的．

(3) X 全分离$\Leftrightarrow\forall\ x,y\in X$ 且 $x\neq y$ 存在 X 的一个分解 $\{A,B\}$ 使 $x\in A,y\in B$.

(4) X 全分离$\Rightarrow X$ 是完全 Hausdorff($T_{2\frac{1}{2}}$)的，Urysohn 的．

(5) X 既全不连通又局部连通$\Rightarrow X$ 是离散的．

证明是容易的． □

5.4.3 定义 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做零维的，如果 $\langle X,\tau\rangle$ 存在一个全部由既开又闭的子集构成的基．

5.4.4 命题 (1) X 是零维的$\Rightarrow X$ 是正则的．

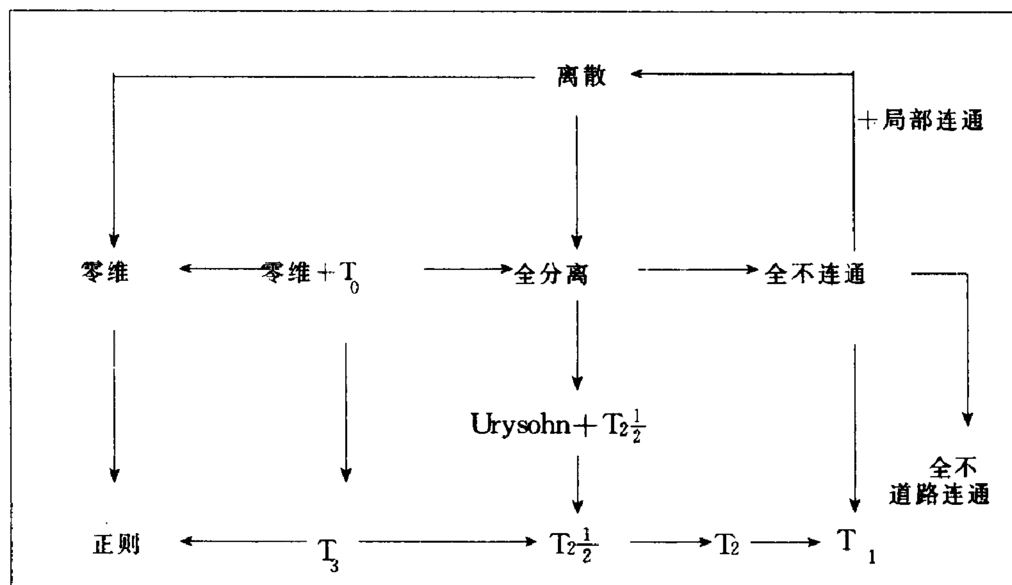
(2) X 是零维的 T_0 空间$\Rightarrow X$ 是全分离的．

证 (1) 显然．

(2) $\forall\ x,y\in X$，且 $x\neq y$，由 T_0 性，不妨假设$\exists\ U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau_X$ s.t. $y\notin U$. 则 $\exists\ B$ 既开又闭使 $x\in B\subset U$. 令 $A=\mathscr{C}B$，则 $\{A,B\}$ 为 X 的一个分解且 $x\in B$, $y\in A$. 故 X 是全分离的． □

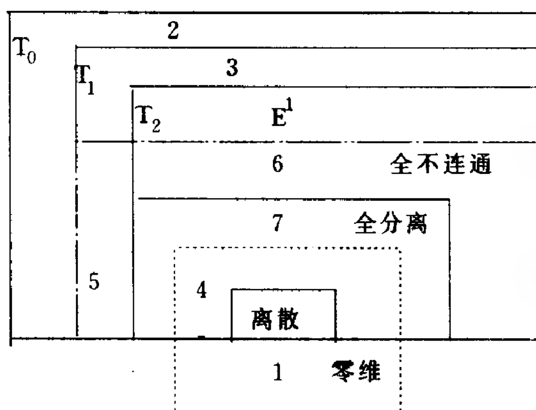
上述诸种关系可总结成下表 5.4.1.

表 5.4.1



B 反例表与反例

表5.4.2



5.4.1(即表中的 1,余类推)

(1) 平凡空间(至少有两点)是零维的非 T_0 的;(2) 奇偶拓扑空间$\langle \mathbf{N},\tau\rangle$是零维的非 T_0 的.

5.4.2 特殊点拓扑空间(至少有两点)是 T_0 的,非 T_1 的,从而非零维,非全不连通.

5.4.3 无限集 X,取有限补拓扑 τ, $\langle X,\tau\rangle$是 T_1 的,非 T_2 的,非全不连通的.

5.4.4 无限的 Fort 空间$\langle X,\tau\rangle$是零维的,全分离的,非离散的.

证 记 $\tau=\{G\subset X \mid p\notin G$ 或 $\mathscr{C}G$ 有限$\}$, $\forall\, x,y\in X$ 且 $x\neq y$, 不妨假设 $y\neq p$, 则$\{y\}$是既开又闭的,于是$\{\mathscr{C}\{y\},\{y\}\}$就是 X 的一个分解且 $x\in\mathscr{C}\{y\}$, $y\in\{y\}$, 故$\langle X,\tau\rangle$是全分离的. 令

$$\mathscr{B}=\{\{x\}\mid x\in X,\ x\neq p\}\cup(\mathscr{N}(p)\cap\tau),$$

则 $\mathscr{B}$ 的每个成员都是既开又闭的. 如果 $G\in\tau$, $\forall\, x\in G$,若 $x\neq p$ 则$\{x\}\in\mathscr{B}$ 且 $x\in\{x\}\subset G$; 若 $x=p$, 则 $G\in\mathscr{N}(p)\cap\tau$. 总之$\exists\, B\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in B\subset G$. 故 $\mathscr{B}$ 是 τ 的一个基,所以$\langle X,\tau\rangle$是零维的. □

5.4.5 设 X 为无限集，$p,q\notin X$，$X^*=X\cup\{p,q\}$，

$$\tau=\mathscr{P}(X)\cup\{G\subset X^*\,|\,G\text{ 包含 }p\text{ 或 }q\text{ 且 }X^*-G\text{ 有限}\}.$$

则 $\langle X^*,\tau\rangle$ 是全不连通的，非 T_2 的，非全分离的，也非零维的．

证 设 $A\subset X^*$，A 至少有两点．若 $\exists\ x\in A$ s.t. $x\neq p$，$x\neq q$，则 $\{\{x\},A-\{x\}\}$ 就是子空间 A 的一个分解；若不存在上述 x，即 $A=\{p,q\}$，则 $\{p\}$，$\{q\}$ 是 A 的两个不相交的闭集，故 $\{\{p\},\{q\}\}$ 是 A 的一个分解．总之 A 不连通．所以 $\langle X^*,\tau\rangle$ 的每个连通分支都是单点集，即 $\langle X^*,\tau\rangle$ 是全不连通的．

由于 $\forall\ U\in\mathscr{N}(p)\cap\tau$ 及 $\forall\ V\in\mathscr{N}(q)\cap\tau$，

$$\mathscr{C}(U\cap V)=(\mathscr{C}U)\cup(\mathscr{C}V)\text{ 为有限集}.$$

所以 $U\cap V\neq\varnothing$，故 $\langle X^*,\tau\rangle$ 不是 T_2 的． □

5.4.6 Arens 方形 $\langle X,\tau\rangle$：令

$$S=\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\,|\,0<x,y<1,\ x\neq\frac{1}{2}\},$$

$$X=S\cup\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}\cup\left\{\langle\frac{1}{2},r\sqrt{2}\rangle\,|\,r\in\mathbf{Q},\ 0<r\sqrt{2}<1\right\}.$$

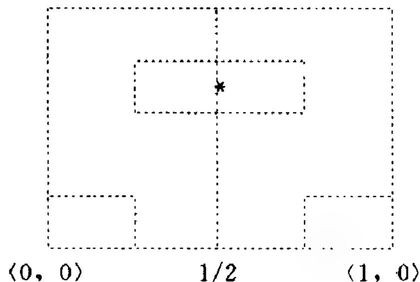


图 5.4.1

当 $\langle x,y\rangle\in S$ 时，令

$$\mathscr{B}(\langle x,y\rangle)=\{B(\langle x,y\rangle,\varepsilon)\cap S\,|\,\varepsilon>0\},$$

其中 $B(\langle x,y\rangle,\varepsilon)$ 是 E^2 中的开球；

当 $\langle x,y\rangle\notin S$ 时，令

$$\mathscr{B}(\langle x,y\rangle)=\{U_n(\langle x,y\rangle)\,|\,n\in\mathbf{N}\},$$

其中

$$U_n(\langle 0,0\rangle)=\left(\{\langle 0,0\rangle\}\cup\left((0,\frac{1}{4})\times(0,\frac{1}{n})\right)\right)\cap X,$$

$$U_n(\langle 1,0\rangle)=\left(\{\langle 1,0\rangle\}\cup\left((\frac{3}{4},1)\times(0,\frac{1}{n})\right)\right)\cap X,$$

$$U_n(\langle\frac{1}{2},r\sqrt{2}\rangle)=((\frac{1}{4},\frac{3}{4})\times(r\sqrt{2}-\frac{1}{n},r\sqrt{2}+\frac{1}{n}))\cap X.$$

以 $\mathscr{B}(p)$ 为相应点 p 的开邻域基生成 X 的拓扑 τ．$\langle X,\tau\rangle$ 叫做 Arens 方形，它是 T_2 的，全不连通的，非全分离的．

证 (1) 设 $p,q\in X$ 且 $p\neq q$.

(i) 若 $p,q\in S$，则显然有 $U,V\in\tau$ s.t. $p\in U$，$q\in V$，$U\cap V=\varnothing$.

(ii) 若 $p\in S$ 而 $q\notin S$，设 $p=\langle x_1,y_1\rangle$，$q=\langle x_2,y_2\rangle$，则 $y_1\neq y_2$. 取 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{n}<\frac{1}{2}|y_1-y_2|$，取 $U=B(p,\frac{1}{n})\cap S$，$V=U_n(q)$ 就有 $U\cap V=\varnothing$.

(iii) $p,q\notin S$，$p=\langle x_1,y_1\rangle$，$q=\langle x_2,y_2\rangle$.

1° 若 $y_1\neq y_2$，取 n s.t. $\frac{1}{n}<\frac{1}{2}|y_1-y_2|$，则 $U_n(p)\cap U_n(q)=\varnothing$.

2° 若 $y_1=y_2$，即 $p=\langle 0,0\rangle$，$q=\langle 1,0\rangle$，则任取 n，都有 $U_n(p)\cap U_n(q)=\varnothing$.

总之，$\langle X,\tau\rangle$是 Hausdoff 的.

(2) 设 $A\subset X$,至少有两点.

(i) 若 $\exists\ p=\langle x_1,y_1\rangle$, $q=\langle x_2,y_2\rangle$ s.t. $y_1\neq y_2$，则取介于 y_1,y_2 之间的非 $r\sqrt{2}$ 类型的无理数 t,

$$\{\{\langle x,y\rangle\in A\mid y<t\},\ \{\langle x,y\rangle\in A\mid y>t\}\}$$

就是 A 的一个分解.

(ii) A 中任意一点的第二坐标都相等,只有两种可能:

1° $A\subset S$，取 $p=\langle x_1,y_2\rangle$, $q=\langle x_2,y_2\rangle$, $y_2\neq 0$, $x_1\neq x_2$. 再取介于 x_1,x_2 之间的无理数 t，则

$$\{\{\langle x,y\rangle\in A\mid x<t\},\ \{\langle x,y\rangle\in A\mid x>t\}\}$$

就是 A 的一个分解.

2° $A=\{\langle 0,0\rangle,\ \langle 1,0\rangle\}$，显然$\{\{\langle 0,0\rangle\},\ \{\langle 1,0\rangle\}\}$就是 A 的一个分解.

总之,A 不连通. 所以$\langle X,\tau\rangle$的连通分支都是单点集,即$\langle X,\tau\rangle$全不连通.

(3) 设$\{A,B\}$为 X 的任一分解,且$\langle 0,0\rangle\in A$,$\langle 1,0\rangle\in B$,由于 A 是开集,故 $\exists\ n\in\mathbf{N}$ s.t. $U_n(\langle 0,0\rangle)\subset A$，由于 A 也是闭的,故

$$A_1=\left\{\langle\frac{1}{4},\ y\rangle\mid y\in\mathbf{Q},\ 0<y\leqslant\frac{1}{n}\right\}\subset A.$$

再由 A 是开的,则 $\forall\ p\in A_1\subset S$, $\exists\ \varepsilon(p)>0$ s.t.

$$B(p,\varepsilon(p))\cap S\subset A,$$

即 $\forall\ y\in(0,\frac{1}{n}]\cap\mathbf{Q}$, $\exists\ x\in\mathbf{Q}$, s.t. $x>\frac{1}{4}$ 且$\langle x,y\rangle\in A$.

同理,$\exists\ m\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ y\in(0,\frac{1}{m}]\cap\mathbf{Q}\ \exists\ x\in\mathbf{Q}$ 满足 $x<\frac{3}{4}$且$\langle x,y\rangle\in B$.

现任取 $r\in\mathbf{Q}$ s.t. $0<r\sqrt{2}<\min\{\frac{1}{n},\ \frac{1}{m}\}$，就有:每个 $U_k\left(\langle\frac{1}{2},r\sqrt{2}\rangle\right)\in\mathscr{B}\left(\langle\frac{1}{2},r\sqrt{2}\rangle\right)$,都要同时与 A,B 相交. 即$\langle\frac{1}{2},r\sqrt{2}\rangle\in\overline{A}\cap\overline{B}=A\cap B$，这与$\{A,B\}$是 X 的分解矛盾. 这就证明不存在 X 的分解$\{A,B\}$能使 $p\in A,q\in B$. 从而$\langle X,\tau\rangle$不是全分离的. □

5.4.7 不规则点阵空间$\langle X,\tau\rangle$:

$X=(\mathbf{N}\times\mathbf{N})\cup(\mathbf{N}\times\{0\})\cup\{\langle 0,0\rangle\}$.

$\forall\ \langle i,k\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，令

$$\mathscr{B}(\langle i,k\rangle)=\{\langle i,k\rangle\};$$

$\forall\ \langle i,0\rangle\in\mathbf{N}\times\{0\}$，令

$$\mathscr{B}(\langle i,0\rangle)=\{U_n(\langle i,0\rangle)\mid n\in\mathbf{N}\},$$

其中 $U_n(\langle i,0\rangle)=\{\langle i,k\rangle\mid k=0$ 或 $k\geqslant n\}$;又令

$$\mathscr{B}(\langle 0,0\rangle)=\{V_n\mid n\in\mathbf{N}\},$$

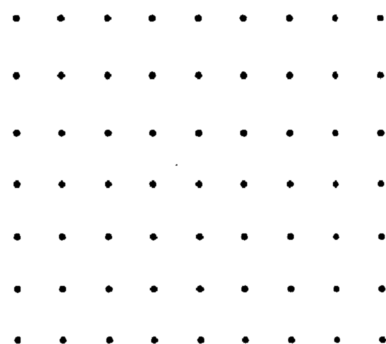


图 5.4.2

其中 $V_n=\{\langle i,k\rangle \mid i=k=0$ 或 $i,k\geqslant n\}$.

由每个 $\mathscr{B}(p)$ 为相应点 $p\in X$ 的开邻域基生成拓扑 τ. 则称 $\langle X,\tau\rangle$ 为不规则点阵空间，它是全分离的，非零维的.

证 (1) 设 $p,q\in X$ 且 $p\neq q$.

(i) 若有 $p\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$，则 $\{\{p\}, X-\{p\}\}$ 就是 X 的一个分解且 $p\in\{p\}$，$q\in X-\{p\}$；

(ii) p,q 都不属于 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，则必有一点，比如 $p=\langle i,0\rangle$，$i\in\mathbf{N}$. 令

$$A=\{\langle i,k\rangle \mid k\geqslant 0\},\qquad B=X-A.$$

则 $\{A,B\}$ 是 X 的一个分解，且 $p\in A$，$q\in B$.

所以 $\langle X,\tau\rangle$ 是全分离的.

(2) 若 $\langle X,\tau\rangle$ 是零维的，则有 τ 的一个基 $\mathscr{B}$ 使 $\forall\, B\in\mathscr{B}$，$B$ 是既开又闭的. 我们任取一个 $U_n(\langle 0,0\rangle)$，则 $\exists\, B\in\mathscr{B}$ s.t. $\langle 0,0\rangle\in B\subset U_n(\langle 0,0\rangle)$，从而必有 $m>n$ s.t.

$$\langle 0,0\rangle\in U_m(\langle 0,0\rangle)\subset B\subset U_n(\langle 0,0\rangle).$$

而当 $i>m$ 时，

$$\langle i,0\rangle\in\overline{U_m(\langle 0,0\rangle)}\subset\overline{B}=B\subset U_n(\langle 0,0\rangle)$$

但依 $U_n(\langle 0,0\rangle)$ 的定义，$\langle i,0\rangle\notin U_n(\langle 0,0\rangle)$.

这是一个矛盾. 所以就证明了 $\langle X,\tau\rangle$ 不是零维的. □

§5.5 紧性概念的扩充与反例

本节我们再介绍几种紧性概念，给出诸紧性间的关系并给出区别各种紧性的反例.

A 紧性概念的扩充与相互关系

我们已知定义在紧致拓扑空间上的任一连续的实值函数总是有界的. 当然对于定义在任意空间，即使在欧氏空间上的连续的实值函数也未必是有界的. 于是我们试图利用"任一连续的实值函数总是有界的"这一特征来刻划空间的一种性质。这就引进了下述概念.

5.5.1 定义 如果定义在拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 上的任一实值连续函数都是有界的，就称此空间 $\langle X,\tau\rangle$ 是伪紧的.

5.5.2 定理 (1) 开式或闭式超连通空间总是伪紧的.

(2) 可数紧的拓扑空间是伪紧的.

(3) 伪紧的 T_4 空间是可数紧的.

(4) 对任一度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 则有：X 伪紧 $\Leftrightarrow X$ 紧致

证 (1) 事实上，可有更强的结果：开式或闭式超连通空间 $\langle X,\tau\rangle$ 上的任一实值连续函数都是常值的.

(i) 开式超连通情形：

假设 $f: X\to E^1$ 连续且 $\exists\, x_1,x_2\in X$ s.t.

$$f(x_1)=a<b=f(x_2),$$

取 $c\in(a,b)$，则 $f^{-1}((-\infty,c))$与 $f^{-1}((c,+\infty))$是 X 的两个不相交的非空开集，与 X 的开式超连通性矛盾．所以 f 是常值的．

(ii) 对于闭式超连通情形：

假设 $f:X\to E^1$ 连续且 $\exists\ x_1,x_2\in X$ s.t.

$$f(x_1)=a\neq b=f(x_2),$$

则 $f^{-1}(\{a\})$与 $f^{-1}(\{b\})$为 X 的两个不相交的非空闭集，与 X 的闭式超连通性矛盾．所以 f 是常值的．

(2) 由 A4.5.6 即得．

(3) 设$\langle X,\tau\rangle$是伪紧的 T_4 空间，如果$\langle X,\tau\rangle$不是可数紧的，则 X 有一个可数无限子集 A 无 ω 聚点，因 X 是 T_1 的，故 A 无聚点，从而 A 的每个子集都无聚点，于是 A 的每个子集都是闭集，故 A 作为子空间是离散的．设 $A=\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，则由 $f(x_n)=n$ 定义的函数 $f:A\to E^1$ 是连续的．由于 X 是正规的，故由 Tieze 扩张定理，存在连续的 $g:X\to E^1$ 使 $g|_A=f$．显然 g 是无界的，这与 X 的伪紧性矛盾，所以 X 是可数紧的．

(4) 由于度量空间总是 T_4 的，且可数紧与紧致等价，所以对于度量空间伪紧$\Leftrightarrow$紧致．□

注　由此可见 Tietze 扩张定理的一个重要应用，得到了能用实值连续函数都有界的性质刻划度量空间的紧性．

我们知道 E^1 不是紧致的，但 $E^1=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}[-n,n]$，其中每个$[-n,n]$都是紧致的；一个 Hausdorff 空间(或正则空间)$\langle X,\tau\rangle$是局部紧的$\Leftrightarrow\langle X,\tau\rangle$的每一点都有一个开邻域的闭包是紧致的，但对任意的拓扑空间，这个结果未必成立(可见 B5.5.2)．这些事实，启发我们引进下述概念．

5.5.3 定义　(1) 如果拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$可以写成可数多个紧致子集的并，则称$\langle X,\tau\rangle$是 σ-紧的．

(2) 如果拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$既 σ-紧又局部紧就称$\langle X,\tau\rangle$是 σ-局部紧的．

(3) 如果$\langle X,\tau\rangle$满足条件：

$$\forall\ x\in X\ \exists\ U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau\ \text{s.t.}\ \overline{U}\text{紧致},$$

则称$\langle X,\tau\rangle$是强局部紧的．

5.5.4 定理　$\langle X,\tau\rangle$是 σ-局部紧的$\Leftrightarrow\langle X,\tau\rangle$是局部紧的 Lindelöf 的．

证　“$\Rightarrow$”　显然

“$\Leftarrow$”　$\forall\ x\in X$，由局部紧性，$\exists\ U(x)\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $U(x)$紧致，由 Lindelöf 性可知 X 的开覆盖

$$\mathscr{U}=\{\mathring{U}(x)\mid x\in X\}$$

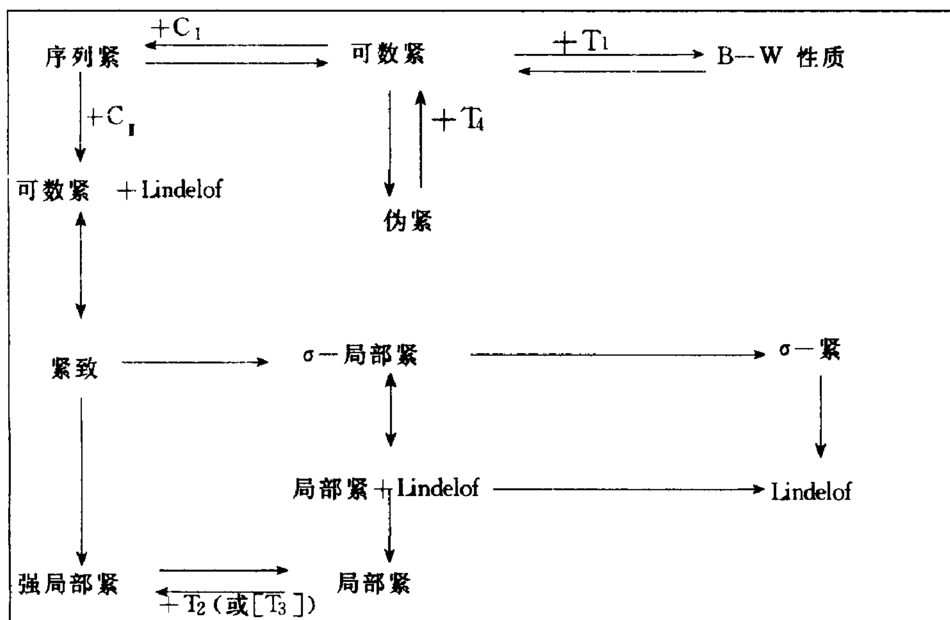
有可数子覆盖$\{\mathring{U}(x_i)\mid i\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{U}$．于是

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}U(x_i).$$

所以$\langle X,\tau\rangle$是 σ-紧的．□

现将诸紧性间的关系归纳成下表 5.5.1，5.5.2：

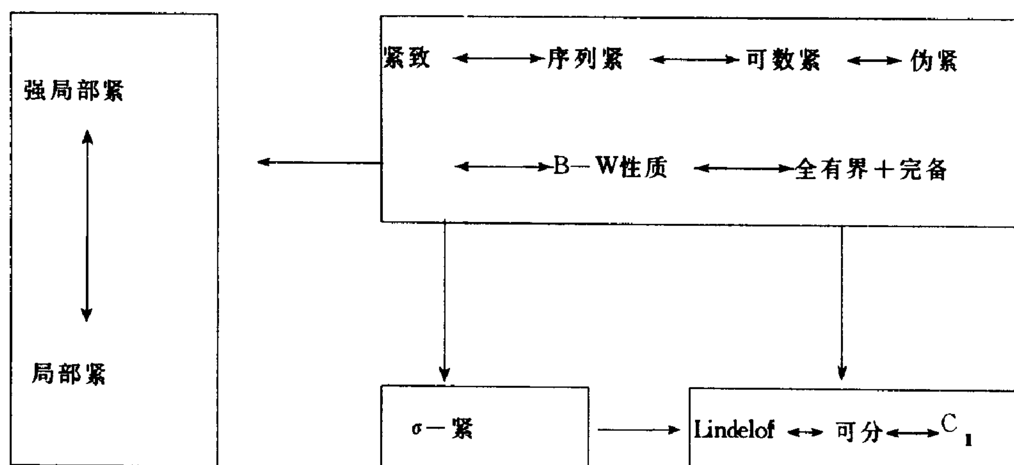
表 5.5.1



注　表中 C_{I}，C_{II} 分别表示第一、第二可数(下同).

表 5.5.2

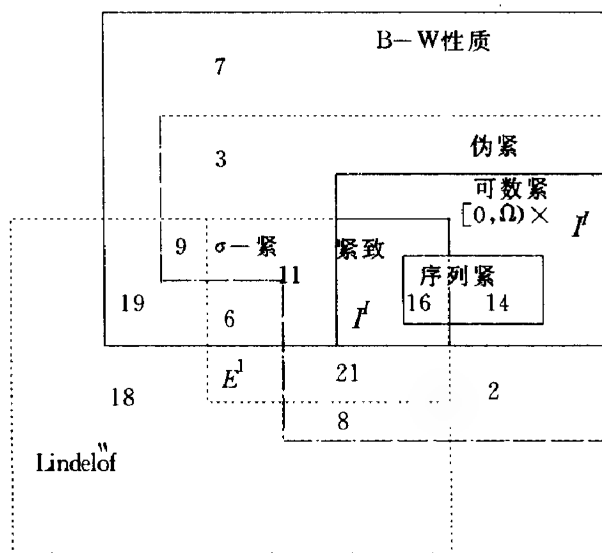
对度量空间而言



B 反例表

5.5.1(即表中的1,余类推) 不可数的离散空间显然是强局部紧而非Lindelof的.

表5.5.3



5.5.2 不可数的特殊点拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$是伪紧的,局部紧的,第一可数的,非Lindelöf的,也不具有B—W性质,也非强局部紧的.

表5.5.4

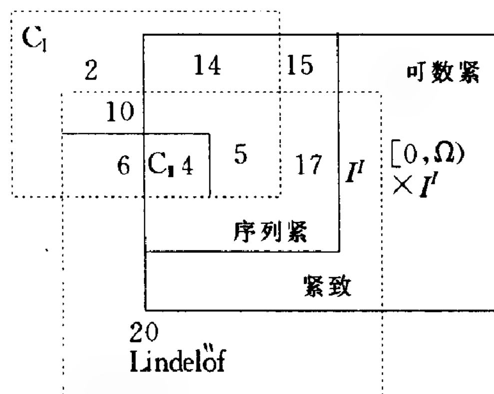
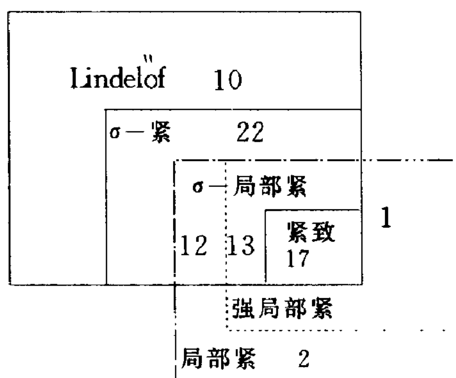


表5.5.5



证 (1) 因X是开式超连通的,所以是伪紧的.

(2) 因$\forall\ x\in X$，$\{x,p\}$就是 x 的紧致邻域，所以$\langle X,\tau\rangle$是局部紧的，但$\forall\ U\in\mathscr{V}(x)$，总有 $p\in U$，故 $\overline{U}=X$ 不是紧致的，因此$\langle X,\tau\rangle$不是强局部紧的．

(3) 因$\forall\ x\in X$，$\{\{x,p\}\}$就是 x 的邻域基，故为第一可数的．

(4) 由于 X 的开覆盖$\{\{x,p\}\mid x\in X\}$无可数子覆盖，故 X 非 Lindelöf 的．

(5) 若 A 为 X 的不包含 p 的无限子集，则 A 无聚点，所以 X 不具有 B—W 性质．□

5.5.3 点加倍的不可数的特殊点拓扑空间 $X^*=X\times\{0,1\}$．它是伪紧的，具有 B—W 性质，不是可数紧的，不是 Lindelöf 的．

证 X^*也是开式超连通的，故是伪紧的．由于$\langle x,0\rangle\in\{\langle x,1\rangle\}'$，$\langle x,1\rangle\in\{\langle x,0\rangle\}'$，故 X^*的任一非空子集都有聚点，从而 X^*具有 B—W 性质．由于投影是连续满射，所以如果 X^*是可数紧或 Lindelöf 的，那么 X 也是可数紧或 Lindelöf 的，但由上例可知 X 不是可数紧(因不具有 B—W 性质)，也不是 Lindelöf 的，所以 X^*不是可数紧，也不是 Lindelöf 的．□

5.5.4 有限的排外点拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$是第二可数的，紧致的．

5.5.5 不可数的排外点拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$是紧致的，第一可数的，非第二可数的．

证 紧致与第一可数是显然的，由于子空间 $X-\{p\}$是离散的，又是不可数的，故非第二可数，而第二可数性是遗传性质，所以 X 也非第二可数．□

5.5.6 奇偶拓扑空间$\langle \mathbf{N},\tau\rangle$具有 B—W 性质，是第二可数的，$\sigma$-紧的，不是可数紧，不是伪紧的．

证 令 $f:\mathbf{N}\to E^1$ 为$\forall\ n$，$f(n)=[\frac{n+1}{2}]$，其中$[x]$表示不超过 x 的整数，则 f 连续且无界，所以$\langle \mathbf{N},\tau\rangle$不是伪紧的．其余很明显．□

5.5.7 设 X 为实数集 $\mathbf{R}$ 取离散拓扑，$X^*=X\times\{0,1\}$是 X 的点加倍．则 X^*具有 B—W 性质，非 Lindelöf 的，非伪紧的．□

证 令 $f:X^*\to E^1$ 为第一投影．即$\forall\ \langle x,y\rangle\in X^*$，$f(x,y)=x$．则 f 连续且无界，所以 X^*不是伪紧的．其余很明显．□

5.5.8 不可数集 X 取可数补拓扑 τ，则$\langle X,\tau\rangle$是伪紧的，Lindelöf 的，非 σ-紧的，也不具有 B—W 性质．

证 由于 X 是开式超连通的，所以是伪紧的．因任一非空开集的补集是可数的，所以 X 是 Lindelöf 的，又 X 的任一可数无限子集都没有聚点，所以 X 不具有 B—W 性质．

现设 A 为 X 的任一无限子集，$\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$是 A 的可数无限子集，$i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$，则

$$\mathscr{G}\xlongequal{\text{def}}\{X-\{a_n,\ a_{n+1},\cdots\}\mid n\in\mathbf{N}\}$$

是 A 在 X 中的开覆盖，但无有限子覆盖，所以 X 的任一紧致子集都是有限的．从而任意可数多个紧致子集之并是可数的，但 X 不可数，所以 X 不是 σ-紧的．□

5.5.9 设 X 为 B5.5.8 的可数补拓扑空间，$X^*=X\times\{0,1\}$是 X 的点加倍，则 X^*是伪紧的，Lindelöf 的，且具有 B—W 性质，但非 σ-紧的．□

5.5.10 Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$ 是 Lindelöf 的，第一可数的，非 σ-紧的，非局部紧的，也非第二可数的．

证 设 A 为 $\mathbf{R}_S$ 的紧致子集．则

$$\forall a \in A \exists x_a \text{ s.t. } (x_a, a) \cap A = \varnothing.$$

不然,存在 A 的一个递增序列 $\langle b_i \rangle_{i\in\mathbf{N}}$ s.t.

$$|b_i - a| \to 0(\text{在 } \mathbf{R} \text{ 的通常意义下的极限}).$$

于是

$$\{(-\infty, b_1)\} \cup \{[b_i, b_{i+1}) | i \in \mathbf{N}\} \cup \{[a, +\infty)\}$$

是 A 在 X 中的开覆盖,但无有限子覆盖,这与 A 的紧致性矛盾.

下面我们证明 A 是可数的.

设 $a,b\in A$ 且 $a\neq b$. 则 $(x_a,a)\cap(x_b,b)=\varnothing$, 其中 x_a,x_b 的意义如上一段.

否则(不妨假定 $a<b$), $\exists\ z\in(x_a,a)\cap(x_b,b)$, 于是 $x_b<z<a<b$ 即 $a\in(x_b,b)$, 与 $(x_b,b)\cap A=\varnothing$ 矛盾.

现在 $\forall\ a\in A$ 在区间 (x_a,a) 中选取 $r_a\in\mathbf{Q}$, 并令

$$f: A\to\mathbf{Q},\ a\mapsto f(a)=r_a,$$

则 f 为单射,故 A 可数.

由于 $\mathbf{R}$ 是不可数的,所以 $\mathbf{R}_S$ 非 σ-紧的.

又由于 $\mathbf{R}_S$ 的每个非空开集都是不可数的,所以任何一点都没有紧致邻域,故 $\mathbf{R}_S$ 不是局部紧的.

其余见 B1.5.6 与 C4.3.2.. □

5.5.11 右序拓扑空间 $\mathbf{R}_{ro}$(B1.5.1)是伪紧的,具有 B—W 性质,也是 σ-紧的,但非可数紧.

证 $\mathbf{R}_{ro}$ 显然是开式超连通的,所以是伪紧的,若 A 为 $\mathbf{R}$ 的无限子集,$a\in A$, 则任取 $b\in\mathbf{R}$ s.t. $b<a$, 于是 $b\in A'$, 故 $\mathbf{R}_{ro}$ 具有 B—W 性质.

因 $\mathbf{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,+\infty)$, 且每个 $[-n,+\infty)$ 是 $\mathbf{R}_{ro}$ 的紧致子集,所以 $\mathbf{R}_{ro}$ 是 σ-紧的.

而 $\mathbf{R}_{ro}$ 的可数开覆盖 $\{(-n,+\infty)\,|\,n\in\mathbf{N}\}$, 无有限子覆盖,所以不是可数紧的. □

5.5.12 区间套拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$(B5.3.7)是 σ-局部紧的,不是强局部紧的.

证 因 $X=\bigcup_{n=2}^{\infty}(0,1-\frac{1}{n})$, 其中每个 $(0,1-\frac{1}{n})$ 是 X 的紧致(开)集,故 X 是 σ 紧的,同时, $\forall\ x\in X$, $\exists\ n\in\mathbf{N}$ s.t. $x\in(0,1-\frac{1}{n})$, $(0,1-\frac{1}{n})$ 就是 x 的紧致邻域,所以 X 是局部紧的,从而是 σ-局部紧的.

又因 $\forall\ n$, $\overline{(0,1-\frac{1}{n})}=X$, 它不是紧致的. 所以 X 不是强局部紧的. □

5.5.13 开序数空间 $[0,\omega)$ 是 σ-紧的,强局部紧,非紧致的.

证 因 $[0,\omega)$ 可数,当然是 σ-紧的.

$\forall\ n<\omega, n$ 的开邻域 $[0,n+1)$ 的闭包

$$\overline{[0,n+1)}=[0,n+1]$$

是紧致的,所以 $[0,\omega)$ 是强局部紧的,但

$$\mathscr{G}=\{[0,n)\,|\,n<\omega\}$$

是 $[0,\omega)$ 的开覆盖,无有限子覆盖,故 $[0,\omega)$ 非紧致. □

5.5.14 开序数空间 $[0,\Omega)$ 是序列紧的,第一可数的,非 Lindelöf 的,非第二可数的.

证　设 A 为$[0,\Omega)$的可数无限子集，令

$$B=\{x\in[0,\Omega)\mid x\text{ 有无限多个先行元在 }A\text{ 内}\},$$

由于 A 可数，故$\exists\ \beta<\Omega$ s.t. $\forall\ \alpha\in A$，$\alpha\leqslant\beta$．于是 $\beta\in B$．故 $B\neq\varnothing$．令 $b=\min B$，我们证明 $b\in A'$．若 $b\notin A'$，则 $\exists\ c,d\in[0,\Omega)$ s.t. $c<b<d$ 且

$$(c,d)\cap(A-\{b\})=\varnothing$$

于是 b 的落在 A 内的先行元（至多除 c 外）也都是 c 的先行元，所以 $c\in B$，这与 b 的最小性矛盾．至此证明了$[0,\Omega)$具有 B—W 性质．又易见$[0,\Omega)$是 T_1 的（事实上序拓扑空间都是 T_1 的！）．由 B1.5.8 知$[0,\Omega)$是第一可数的，故由 A4.3.7 知$[0,\Omega)$是序列紧的．

易见$[0,\Omega)$的开覆盖

$$\mathscr{G}\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{[0,\alpha)\mid\alpha\in(0,\Omega)\}$$

无可数子覆盖，这是因为每个$[0,\alpha)$都是可数集．所以$[0,\Omega)$不是 Lindelöf 的．自然也就不是紧致的，故由 A4.3.7 自然也就不是第二可数的．　□

5.5.15　序数空间$[0,2\Omega)$，其中 $2\Omega=\Omega+\Omega$，也就是$\{1,2\}\times[0,\Omega)$取字典序所得良序集的序型，它是序列紧的，非 Lindelöf 的，也非第一可数的（注：有些著作，记 $\Omega2=\Omega+\Omega$）．

证　(1)　设$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$是$[0,2\Omega)$的任一序列．如果$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$有无限多项落在$[0,\Omega)$中，即有一个子序列属于$[0,\Omega)$，由于$[0,\Omega)$是序列紧的，所以这个子序列又有收敛的子序列，它也是$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在$[0,2\Omega)$中的收敛的子序列．如果$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$只有有限多项落在$[0,\Omega)$中，那么必然有无限多项落到$[\Omega,2\Omega)$中，而$[\Omega,2\Omega)$是与$[0,\Omega)$同胚的．所以$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$仍然有收敛的子序列，这就证明了$[0,2\Omega)$是序列紧的．

(2)　$[0,2\Omega)$的开覆盖

$$\mathscr{G}\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{[0,\Omega+1)\}\cup\{(\Omega,\alpha)\mid\Omega<\alpha<2\Omega\}$$

没有可数子覆盖，所以$[0,2\Omega)$不是 Lindelöf 的．

(3)　由 B1.5.8 知，$[0,2\Omega)$的子空间$[0,\Omega]$不是第一可数的，所以$[0,2\Omega)$也不是第一可数的．　□

5.5.16　Fort 空间$\langle X,\tau\rangle$既是序列紧的，也是紧致的（C.4.3.8）．

5.5.17　不可数的 Fort 空间$\langle X,\tau\rangle$是紧致的，序列紧的，不是第一可数的（B1.5.5）．

5.5.18　仿 Fort 空间$\langle X,\tau\rangle$，其中 X 为不可数集．$\tau=\{G\subset X\mid p\notin G\text{ 或 }\mathscr{C}G\text{ 可数}\}$，$p\in X$ 是固定的点，$\langle X,\tau\rangle$是 Lindelöf 的，非 σ-紧的，非伪紧的，也不具有 B—W 性质．

证　(1)　由于 p 的任一开邻域的补集可数，故$\langle X,\tau\rangle$是 Lindelöf 的（B1.4.2）．

(2)　设 τ_1 为 X 上的可数补拓扑，则 $\tau_1\subset\tau$，由 B5.5.8，可知$\langle X,\tau_1\rangle$非 σ-紧，不具有 B—W 性质，所以$\langle X,\tau\rangle$也非 σ-紧，也不具有 B—W 性质．

(3)　任取 F 为 X 的可数无限集，且 $p\notin F$，则 $\mathscr{C}F$ 为包含 p 的开集．又设 $g:F\to\mathbf{N}$ 为一一映射．令 $f:X\to E^1$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathscr{C}F,\\ g(x) & x\in F.\end{cases}$$

容易验证 f 连续，且无界，所以$\langle X,\tau\rangle$不是伪紧的．　□

5.5.19　点加倍的仿 Fort 空间 $X^*=X\times\{0,1\}$（其中 X 是仿 Fort 空间）是 Lindelöf 的，

具有 B—W 性质，非伪紧的，非 σ-紧的．

证　(1)　设 $p: X^* \to X$ 为投影，$f: X \to E^1$ 为上例中的连续无界的映射．则 $g = f \circ p: X^* \to E^1$ 也是连续的无界的．所以 X^* 非伪紧．

(2)　由于平凡空间 $\{0,1\}$ 显然紧致，又 X 是 Lindelöf 的，故由 C4.3.10 知 X^* 也是 Lindelöf 的．

(3)　对于点加倍的空间，前面已经看到，每个非空子集都有聚点，故具有 B—W 性质．

(4)　假定 X^* 是 σ-紧的，$X^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n$，其中每个 C_n 紧致．则

$$X = p(X^*) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} p(C_n).$$

其中 p 为投影，故 $p(C_n)$ 紧致，于是 X 也 σ-紧与上例矛盾，所以 X^* 不是 σ-紧的．　□

5.5.20　Arens-Fort 空间 $\langle X, \tau \rangle$（即 B1.5.11 给出的空间）是 Lindelöf 的，非可数紧的，也非第一可数的．

证　(1)　因 X 本身可数，当然是 Lindelöf 的．

(2)　令 $A = \{\langle n, 1 \rangle \mid n \in \mathbf{N}\}$，$U = X - A$．则

$$\mathscr{G} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{U\} \cup \{\{\langle n, 1 \rangle\} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

是 X 的可数开覆盖，它无有限子覆盖，所以 X 不是可数紧的．

(3)　由 B1.5.11 可知，存在 X 中以 $\langle 0,0 \rangle$ 为接触点的序列 $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$，它没有收敛于 $\langle 0, 0 \rangle$ 的子序列，故由 A1.3.4 知 X 不是第一可数的．　□

5.5.21　无理斜坡拓扑空间 $\langle X, \tau \rangle$（B5.3.12）是伪紧的，σ-紧的，但不具有 B—W 性质．

证　(1)　由于 X 本身可数，当然是 σ-紧的．再者它的任意两个非空开集的闭包都要相交（B5.3.12 的证明过程），由此可证 X 上的任一实值连续函数 $f: X \to E^1$ 总是常值的．因为若非常值，则∃ $p_1, p_2 \in X$ 使 $f(p_1) \neq f(p_2)$，令 $\varepsilon = \frac{1}{3} |f(p_1) - f(p_2)|$，

$$U = (f(p_1) - \varepsilon, f(p_1) + \varepsilon), \quad V = (f(p_2) - \varepsilon, f(p_2) + \varepsilon).$$

则 $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$．于是 $f^{-1}(U)$，$f^{-1}(V)$ 为 X 的分别包含 p_1, p_2 的开集，且

$$\begin{aligned}\overline{f^{-1}(U)} \cap \overline{f^{-1}(V)} &\subset \overline{f^{-1}(\overline{U})} \cap \overline{f^{-1}(\overline{V})} \\ &= f^{-1}(\overline{U}) \cap f^{-1}(\overline{V}) \\ &= f^{-1}(\overline{U} \cap \overline{V}) = \varnothing.\end{aligned}$$

导致矛盾．所以 f 是常值的，从而 X 是伪紧的．

(2)　由于 x 轴上的所有整数点构成的集合 $\mathbf{N} \times \{0\}$ 无聚点，所以 X 不具有 B—W 性质．　□

5.5.22　整数同余分割拓扑空间 $\langle X, \tau \rangle$：其中 $X = \mathbf{Z}$，设 $a, k \in X$，令

$$a + k\mathbf{Z} = \{a + kz \mid z \in \mathbf{Z}\},$$

$$\mathscr{B} = \{a + k\mathbf{Z} \mid a, k \in X\}.$$

可用 $\mathscr{B}$ 为基生成一个拓扑 τ．$\langle X, \tau \rangle$ 是 σ-紧的，非局部紧的．

证　由于 X 本身可数，当然是 σ-紧的，现取定 $\mathscr{B}$ 的一个成员 $a + k\mathbf{Z}$，定义

$$f: a + k\mathbf{Z} \to X, \quad a + kz \mapsto z.$$

$a + k\mathbf{Z}$ 作为 X 的子空间，则 f 是连续的．

事实上，$\forall\ b+l\mathbf{Z}\in\mathscr{B}$，

$$f^{-1}(b+l\mathbf{Z})=(a+kb)+kl\mathbf{Z}$$

是 X 的开集，当然也是子空间 $a+k\mathbf{Z}$ 的开集．所以 f 连续，又显然 f 是满的．

现在假定 x 有一个紧致邻域 U，则 $\exists\ a+k\mathbf{Z}\in\mathscr{B}$ s.t. $x\in a+k\mathbf{Z}\subset U$.

由 $a+k\mathbf{Z}$ 的补集是 X 的另一些 mod k 的同余类的并，而任意两个 mod k 的不相同的同余类是不相交的，所以 $a+k\mathbf{Z}$ 也是 X 的闭集，当然也是 U 的闭集，因此是紧致的，从而 X 也是紧致的．但 X 不是紧致的，事实上 $(3+8\mathbf{Z})\cap\mathbf{N}$ 中所有素数构成的子集（当然是无限的）A 没有聚点．这是因为，$\forall\ k\in X-\{0,-1,1\}$，$k\mathbf{Z}$ 是 k 的一个邻域，而 $k\mathbf{Z}\cap(A-\{k\})=\varnothing$，故 $k\notin A'$．对 X 中的所有的不等于 0，−1，1 的 k 都成立．再分别考虑 0，−1，1．因 $4\mathbf{Z}$ 是 0 的邻域，且 $4\mathbf{Z}\cap A=\varnothing$，故 $0\notin A'$．因 $1+8\mathbf{Z}$ 是 1 的邻域．但 $(1+8\mathbf{Z})\cap(3+8\mathbf{Z})=\varnothing$，当然也有 $(1+8\mathbf{Z})\cap A=\varnothing$ 故 $1\notin A'$，又因 $-1+8\mathbf{Z}$ 是 -1 的邻域，但 $(-1+8\mathbf{Z})\cap(3+8\mathbf{Z})=\varnothing$，所以 $-1\notin A'$．可见 A 没有聚点，X 不具有 B−W 性质，当然不是紧致的．这就导致矛盾，从而证明了 X 不是局部紧的． □

反例表中还有两个空间：I^I 以及 $[0,\Omega)\times I^I$ 将在 §6.1 中给出．

紧致性，序列紧性，可数紧性，B−W 性质，Lindelöf 性质，σ-紧性，局部紧性以及强局部紧性都对闭子空间是遗传的．但伪紧性却不然．

5.5.23　设 $\langle X,\tau\rangle$ 为不可数的特殊点拓扑空间，p 为特殊点．已知它是伪紧的（B5.5.2），但子空间 $S=X-\{p\}$ 是离散的，不妨假设 S 与 $\mathbf{R}$ 有相同的基数，于是一一映射 $f:S\to E^1$ 是连续的，无界的，故 S 不是伪紧的．

紧致性，序列紧性，可数紧性，伪紧性，σ-紧性，Lindelöf 性质都能被连续映射保持，但 B−W 性质，局部紧性，强局部紧性未必能被连续映射保持，局部紧性能被连续的开映射保持．

5.5.24　任取 $\langle X,\tau\rangle$ 为非局部紧的拓扑空间，令 τ_D 为 X 上的离散拓扑．则 $\langle X,\tau_D\rangle$ 是强局部紧的，由 $\langle X,\tau_D\rangle$ 到 $\langle X,\tau\rangle$ 的恒同映射是连续满射．由此可见局部紧性与强局部紧性未必能被连续映射保持．

又 B4.3.5 已表明 B−W 性质未必能被连续映射保持．

注　紧致性，可数紧性，Lindelöf 性质，都是指覆盖可以约简的性质，编者曾对以这些性质为特例的更加一般化的所谓强 (m,n)-紧性作过一些讨论，这里 m,n 都是无限基数，且 $m\leqslant n$．如果拓扑空间 X 的每个基数 $\leqslant n$ 的开覆盖都有基数 $<m$ 的子覆盖，就叫 X 是强 (m,n)-紧的．这里加一个"强"字是为了区别于文献中已有的 (m,n)-紧性，并且强 (m,n)-紧蕴涵 (m,n) 紧．若用 ∞ 表示任意基数，那么强 $(\aleph_0,\infty)$-紧正是通常的紧致性，强 $(2^{\aleph_0},\infty)$-紧恰为 Lindelöf 性质，强 $(\aleph_0,\aleph_0)$-紧正是可数紧，有关这方面的讨论可参阅南京大学学报 Vol.27，No.1(1991)，1−7.

第六章　积空间·商空间与函数空间

§6.1　拓扑空间的任意积

A　内容提要

6.1.1 定义　设$\{\langle X_\lambda,\tau_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$为拓扑空间的非空族，由$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$的子集族

$$\mathscr{S}=\{p_\lambda^{-1}(G_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda,\quad G_\lambda\in\tau_\lambda\}$$

为子基生成的拓扑τ就叫X的积拓扑(或Tychonoff拓扑)，$\langle X,\tau\rangle$就叫$\{\langle X_\lambda,\tau_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$的积空间．其中$p_\lambda: X\to X_\lambda$为投影．

由定义可知τ有一个基$\mathscr{B}$，其中每个成员都是$\mathscr{S}$的有限个成员之交，形如$B=\bigcap_{i=1}^{n}p_{\lambda_i}^{-1}(G_{\lambda_i})$，如写成乘积形式$B=\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$，则其中除了有限个指标$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$外，所有的$Y_\lambda=X_\lambda$，而$Y_{\lambda_i}=G_{\lambda_i}\in\tau_{\lambda_i}$．这一特征应引起足够的重视，这个基$\mathscr{B}$叫做$\tau$的定义基以区别于其它形式的基．

6.1.2 定理　(1) 由积空间$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$到每个因子空间$X_\mu$的投影$p_\mu: X\to X_\mu$是连续的，满的，开映射．

(2) 设Z为拓扑空间，则$f: Z\to\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$连续$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$p_\lambda\circ f: Z\to X_\lambda$连续．

6.1.3 定理　设$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$为积空间，则

(1) X的滤子$\mathscr{F}$收敛于点$x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda$的滤子$p_\lambda^*(\mathscr{F})$收敛于$p_\lambda(x)=x_\lambda$．

(2) X的网ξ收敛于$x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda$的网$p_\lambda\circ\xi$收敛于$p_\lambda(x)=x_\lambda$．

即X的滤子与网的收敛是等价于按坐标收敛的．

6.1.4 定理　(1) 积空间$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$是Hausdorff的$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda$是Hausdorff的．

(2) X连通$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda$连通．

(3) (Tychonoff乘积定理)　X紧致$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda$紧致．

6.1.5 定理　积空间$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$局部连通$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda$局部连通且除了有限个以外

还都是连通的；将其中的局部连通换成局部紧结论仍然成立．

6.1.6 定理　积空间 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 是第一（二）可数的 $\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, X_\lambda$ 是第一（二）可数的且除了可数多个以外都是平凡的．

6.1.7 定理　设 $\{\langle X_n,\rho_n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是度量空间的可数族，则 $\forall x=\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}, y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in X$，由

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot\frac{\rho_n(x_n,y_n)}{1+\rho_n(x_n,y_n)}$$

所定义的 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 是 $X=\prod_{n\in\mathbf{N}}X_n$ 的度量，且由 ρ 诱导的拓扑恰好就是将 $\{\langle X_n,\rho_n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$ 视为拓扑空间族时的积拓扑．

6.1.8 定义　设 $X,Y_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 均为拓扑空间，$f_\lambda: X\to Y_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，如果 $\forall x,y\in X$ 且 $x\neq y$，$\exists\lambda\in\Lambda$ s.t. $f_\lambda(x)\neq f_\lambda(y)$，则称映射族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 能区分点；如果 $\forall x\in X$ 以及不包含 x 的闭集 C $\exists\lambda\in\Lambda$ s.t. $f_\lambda(x)\notin\overline{f_\lambda(C)}$，则称 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 能区分点与闭集．

6.1.9 定理　设 $X,Y_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 都是拓扑空间，$f_\lambda: X\to Y_\lambda$，令

$$f: X\to\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda,\ x\mapsto f(x)=\langle f_\lambda(x)\rangle_{\lambda\in\Lambda},$$

则

（1）f 连续 $\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$f_\lambda$ 连续．

（2）f 是单射 $\Leftrightarrow\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 能区分点．

（3）若 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 能区分点与闭集，则 $f: X\to f(X)$ 是开映射．

（4）若 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 能区分点，又能区分点与闭集，且 $\forall\lambda\in\Lambda$，f_λ 都连续，则 $f: X\to\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ 为嵌入．

6.1.10 定理（Tychonoff 嵌入定理）　设 X 为拓扑空间，则下述条件等价：

（1）X 是 Tychonoff 空间（完全正则的 T_1 空间）；

（2）X 能嵌入某个 Tychonoff 方体（单位区间 $[0,1]$ 的乘幂 $[0,1]^\Lambda$ 叫做 Tychonoff 方体）；

（3）X 能嵌入某个紧致 Hausdorff 空间；

（4）X 能嵌入某个 T_4 空间（正规的 T_1 空间）．

B　例题

（一）

做积空间的问题，主要应注意下述几点：

（1）积空间中的集合（无论是开集，闭集或其它形式的集合）并不都是因子空间子集的乘积．

（2）由积空间到因子空间的投影是连续的开映射，一般不是闭映射．

（3）每个因子都是开集的积集合未必是开集．

以上是容易产生错误的一些关节点，不能疏忽．在技巧方面如同有限积一样，要善于应用定义基(或子基).

6.1.1　设 $X_\lambda, Y_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 均为拓扑空间，$X=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$，$Y=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$ 均为积空间，$f_\lambda: X_\lambda\to Y_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，定义

$$f: X\to Y,\ x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\mapsto\langle f_\lambda(x_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda}.$$

证明：f 连续 $\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda$，$f_\lambda$ 连续．

证　“$\Leftarrow$”　首先容易验证

$$\pi_\lambda\cdot f=f_\lambda\circ p_\lambda\quad.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p_\lambda}\downarrow & \searrow{\scriptstyle \pi_\lambda\circ f,\ f_\lambda\circ p_\lambda} & \uparrow{\scriptstyle \pi_\lambda} \\ X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda \end{array}$$

其中 $p_\lambda: X\to X_\lambda$，$\pi_\lambda: Y\to Y_\lambda$ 均为投影．

由 $\forall\lambda\in\Lambda$，f_λ 连续，即得 $\forall\lambda\in\Lambda$

$$\pi_\lambda\circ f=f_\lambda\circ p_\lambda$$

连续，由 A6.1.2(2)知 f 连续．

“$\Rightarrow$”　[法一]　设 G 开于 Y_λ，则由 f 连续知 $(\pi_\lambda\cdot f)^{-1}(G)$ 开于 X，而

$$p_\lambda^{-1}(f_\lambda^{-1}(G))=(f_\lambda\cdot p_\lambda)^{-1}(G)=(\pi_\lambda\circ f)^{-1}(G),$$

又 $p_\lambda: X\to X_\lambda$ 是满的开映射，故

$$f_\lambda^{-1}(G)=p_\lambda(p_\lambda^{-1}f_\lambda^{-1}(G))=p_\lambda(\pi_\lambda\circ f)^{-1}(G)$$

开于 X_λ，所以 f_λ 连续．

[法二]　设 $x_\lambda\in X_\lambda$，$\xi_\lambda=\langle u^d\rangle_{d\in D}$ 为 X_λ 中收敛于 x_λ 的网．

取定一点 $a=\langle a_\mu\rangle_{\mu\in\Lambda}\in X$ s.t. $a_\lambda=x_\lambda$. 再 $\forall d\in D$ 取 $x^d\in X$ 使 $p_\lambda(x^d)=u^d$，当 $\mu\neq\lambda$ 时，$p_\mu(x^d)=a_\mu$($\forall d$ 为常值)，得 X 的网 $\xi=\langle x^d\rangle_{d\in D}$，于是

$$p_\lambda\circ\xi=\xi_\lambda\quad\text{且}\quad a\in\mathrm{Lim}\xi.$$

由 $\pi_\lambda\circ f$ 的连续性得 $\pi_\lambda f(a)\in\mathrm{Lim}\pi_\lambda f\circ\xi$.

由于 $\pi_\lambda\cdot f=f_\lambda\cdot p_\lambda$，所以

$$\begin{aligned} f_\lambda(x_\lambda)&=f_\lambda\cdot p_\lambda(a)=\pi_\lambda f(a)\\ &\in\mathrm{Lim}\pi_\lambda f\cdot\xi=\mathrm{Lim}f_\lambda\cdot p_\lambda\cdot\xi=\mathrm{Lim}f_\lambda\cdot\xi_\lambda\quad, \end{aligned}$$

从而 f_λ 连续． □

注　这一道题正是 B3.3.2 及其逆命题的推广．

6.1.2　证明：若拓扑空间族 $\{\langle X_\lambda,\tau_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ 中有无限个空间不是紧致的，则积空间 $X=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 的每个紧致子集 C 的内部 $\mathring{C}=\varnothing$.

证　假定 $\exists\ x\in\mathring{C}$，则存在定义基的元 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$(其中 $\lambda\notin\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 时 $Y_\lambda=X_\lambda$)使

$$x\in\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\subset C.$$

由于 $\forall\lambda\in\Lambda$，$Y_\lambda=p_\lambda\Big(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\Big)\subset p_\lambda(C)$，所以当 $\lambda\notin\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 时，$X_\lambda=p_\lambda(C)$，故 X_λ 紧致，也就是除了有限个外所有的因子空间都是紧致的，这与假设矛盾. 从而 $\mathring{C}=\varnothing$. □

6.1.3　设 $\langle X,\tau\rangle$ 为拓扑空间，$\Lambda\neq\varnothing$，$\forall\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda=X$.

$$f: X \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = X^\Lambda,$$
$$x \mapsto f(x) = \langle x_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda},$$

其中$\forall\ \lambda \in \Lambda$, $x_\lambda = x$. 证明 $f: X \to X^\Lambda$ 是嵌入.

证　易见 $f: X \to f(X)$是一一的. 因$\forall\ \lambda \in \Lambda$, $p_\lambda \cdot f = id_X$, 当然连续. 所以由 A6. 1. 2(2) $f: X \to X^\Lambda$ 连续,故$f: X \to f(X)$也连续.

再证 $f: X \to f(X)$是开映射.

设G为X的开集,取定一个$\lambda \in \Lambda$, 则

$$p_\lambda f(G) = id_X(G) = G,$$
$$f(G) \subset p_\lambda^{-1}(G) \cap f(X).$$

又若 $y \in p_\lambda^{-1}(G) \cap f(X)$, 则$\exists\ x \in X$ s.t. $y = f(x) \in p_\lambda^{-1}(G)$, 从而

$$x = p_\lambda f(x) \in G,$$

即
$$y = f(x) \in f(G).$$

于是
$$p_\lambda^{-1}(G) \cap f(X) \subset f(G).$$

故
$$f(G) = p_\lambda^{-1}(G) \cap f(X).$$

而 $p_\lambda^{-1}(G)$是 X^Λ 的开集,所以 $f(G)$是 $f(X)$的开集. 因此 $f: X \to f(X)$是开映射,从而是同胚,也就是 $f: X \to X^\Lambda$ 是嵌入. □

注　当 $\Lambda = \{1,2\}$时,便有 $f(X) = id_X = \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$是 $X \times X$ 的对角线. 这一题的结果正好表明 X 与 $X \times X$ 的对角线 id_X 同胚.

6.1.4　证明:如果积空间 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 是 T_4的,则$\forall\ \lambda \in \Lambda$, X_λ 都是 T_4的. 举例说明反之未必.

证　$\forall\ \lambda \in \Lambda$, 先取定一点 $z = \langle z_\mu \rangle_{\mu \in \Lambda} \in X$, 令

$$Z_\mu = \begin{cases} X_\lambda & \mu = \lambda, \\ \{z_\mu\} & \mu \neq \lambda. \end{cases}$$

则 $\prod_{\mu \in \Lambda} Z_\mu$ 同胚于 X_λ. 由于 T_1是遗传性质,也是拓扑性质,所以 X_λ 是 T_1的.

又因

$$\prod_{\mu \in \Lambda} Z_\mu = \bigcap_{\mu \in \Lambda} p_\mu^{-1}(Z_\mu),$$

而$\forall\ \mu \in \Lambda$, Z_μ 闭于 X_μ, 所以 $\prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\mu$ 闭于 X,而正规性对闭子空间是遗传的,所以 X_λ 是正规的.

反过来,已知 Sorgenfrey 直线 $\mathbf{R}_S$ 是 T_5 的(B4. 1. 12(2)), 当然是 T_4 的. 但是我们可以证明 $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$(Sorgenfrey 平面)不是正规的.

事实上,由于 $D \overset{\text{def}}{=\!=} \{\langle x, -x \rangle \mid x \in \mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$ 的离散的闭子空间, 所以$\forall\ f \in [0,1]^D$ 都连续. 且 $\text{Card}[0,1]^D = (2^{\aleph_0})^c = 2^c$, (其中 $c = 2^{\aleph_0}$).

假定 $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$ 正规,则每个 $f: D \to [0,1]$ 都能连续的扩张到 $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$ 上,因此由 $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$ 到 $[0,1]$ 的连续映射至少为 2^c 个; 另一方面, $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$ 有一个可数的稠密子集 $A = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$, 所以 $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$ 上任何一个连续映射由子空间 A 上的值完全确定(B4. 1.

5(2))，而由 A 到$[0,1]$的连续映射至多为

$$\mathrm{Card}[0,1]^A=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=c$$

个，又 $c<2^c$，这就导致矛盾，所以 $\mathbf{R}_S\times\mathbf{R}_S$ 不是正规的. □

6.1.5 证明 Hilbert 方体 $H_c=\prod_{i=1}^{\infty}[0,\frac{1}{i}]$(B1.2.14 及注)作为 Hilbert 空间 H 的子空间与可数无限个$[0,1]$的积空间$[0,1]^{\mathbf{N}}$同胚.

证 只需证 H_c 的子空间拓扑(记为 τ_S)与积拓扑 τ_p 相同(τ_p 是积空间 $\prod_{i=1}^{\infty}[0,\frac{1}{i}]$ 的拓扑).

首先，$\forall\ i, p_i:\langle H_c,\tau_S\rangle\to[0,\frac{1}{i}]$ 连续. 事实上，$\forall\ x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in H_c$，以及 $\varepsilon>0$，只要 $y\in H_c$ 且 $\rho_H(x,y)<\varepsilon$，就有

$$|p_i(x)-p_i(y)|=|x_i-y_i|\leqslant\rho_H(x,y)<\varepsilon.$$

所以 p_i 连续. 从而由积拓扑的最小性可知

$$\tau_p\subset\tau_S\quad.$$

现设 $G\in\tau_S$，$x\in G$，则 $\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $B_{\rho_H}(x,\varepsilon)\cap H_c\subset G$. 取 $n\in\mathbf{N}$ s.t. $\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<\frac{\varepsilon^2}{2}$，令 $B=\prod_{i=1}^{\infty}Y_i$，其中

$$Y_i=\begin{cases}\left(x_i-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2n}},\ x_i+\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}\right)\cap[0,\dfrac{1}{i}], & i\leqslant n,\\[2ex] [0,\dfrac{1}{i}], & i>n.\end{cases}$$

则 $B\in\tau_p$. 我们证 $B\subset B_{\rho_H}(x,\varepsilon)\cap H_c$.

$\forall\ y\in B$，显然 $y\in H_c$，又

$$\begin{aligned}\rho_H(x,y)&=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\&<\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{2n}+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\Big)^{1/2}\\&<\Big(\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\Big)^{1/2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $B\subset B_{\rho_H}(x,\varepsilon)\cap H_c\subset G$，于是 $G\in\tau_p$，即有

$$\tau_S\subset\tau_p\quad,$$

从而 $\tau_S=\tau_p$.

由于$[0,\frac{1}{i}]$与$[0,1]$同胚. 所以积空间 $\prod_{i=1}^{\infty}[0,\frac{1}{i}]$ 与$[0,1]^{\mathbf{N}}$也同胚，也就是 H_c 与$[0,1]^{\mathbf{N}}$同胚. □

注 由 A.6.17可知，本题与 B1。6。15异曲同工. 由于这一题的结论，也就回过头来验证了 B1.2.14的注中指出的 H_c 中序列的收敛等价于按坐标收敛。

6.1.6 证明可数多个拓扑空间的积空间 $X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ 是序列紧的 $\Leftrightarrow \forall\, i$，$X_i$ 是序列紧的．

证 必要性，由每个投影都是连续满射立即可得．现证充分性．

我们证明的思路是对积空间中任给的序列 $\langle x^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$（其中 $x^n=\langle x_i^n\rangle_{i\in\mathbf{N}}$）顺次考虑由坐标构成的序列．首先考虑由第1个坐标构成的序列有收敛的子序列，接着考虑由第2个坐标构成的序列中那些与第1个坐标的收敛子序列的项对应的项组成的子序列也有收敛的子序列，依此类推下去，然后由对角线法则，挑选原始序列的子序列，其第1项的标号等于第1坐标收敛子序列的第1项的标号，第2项的标号等于第2坐标收敛子序列的第2项的标号，依次类推，如此挑选出的 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 的子序列，它的每个坐标都收敛，从而它本身收敛，由此完成证明．现在的问题是如何准确明了地表达这个思想，如果取一次子序列就加一个下标，这个办法显然是不合适的．于是我们就想到借助于映射．

如果 $\langle y_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ 是 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 的子序列，其充分必要的条件是存在映射 $k:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 使

(1) $\forall\, i\in\mathbf{N}$，$y_i=x_{k(i)}$，

(2) $\forall\, i,j\in\mathbf{N}$，$i>j\Rightarrow k(i)>k(j)$

成立．现在就可以正式证明如下了：

首先 X_1 的序列 $\langle x_1^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 有收敛子序列，即存在严格的保序映射 $k_1:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 使

$$\langle x_1^{k_1(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to a_1\in X_1,$$

（用"$\to$"表示"收敛于"）．

X_2 的序列 $\langle x_2^{k_1(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 有收敛子序列，即存在严格保序映射 $k_2:\mathbf{N}\to k_1(\mathbf{N})$，使

$$\langle x_2^{k_2(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to a_2\in X_2,$$

....

由归纳法可知 $\forall\, i\in\mathbf{N}(i>1)$ 存在严格保序映射

$$k_i:\mathbf{N}\to k_{i-1}(\mathbf{N})$$

使

$$\langle x_i^{k_i(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to a_i\in X_i.$$

现在考察 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 的子序列 $\langle x^{k_n(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}$（注 $k_n(n)$ 的值正是第 n 个坐标序列的收敛子序列的第 n 项，这正是对角线法则的体现），它的第 i 个坐标构成的序列是 $\langle x_i^{k_n(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}$，排列起来就是：

$$x_i^{k_1(1)},\ x_i^{k_2(2)},\cdots,\ x_i^{k_{i-1}(i-1)},\ x_i^{k_i(i)},\ x_i^{k_{i+1}(i+1)},\ \cdots.$$

由于 $k_i(\mathbf{N})\supset k_{i+1}(\mathbf{N})\supset k_{i+2}\supset\cdots$ 且保序，所以上述第 i 个坐标序列除去前面 $i-1$ 项剩下的就构成 $\langle x_i^{k_i(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 的子序列，而序列收敛性与前面有限项是无关的．由归纳构造可知 $\langle x_i^{k_i(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to a_i$，所以 $\langle x_i^{k_n(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to a_i$．由于积空间中序列收敛等价于按坐标收敛，所以原始序列 $\langle x^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 的子序列 $\langle x^{k_n(n)}\rangle_{n\in\mathbf{N}}\to a=\langle a_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$．至此就证明了 X 是序列紧的． □

6.1.7 设 $\{\langle X_n,\rho_n\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是度量空间的可数族，ρ 为 A6.1.7中定义的 X 上的度量．证明：

(1) 如果 $\forall\, n\in\mathbf{N}$，$\langle X_n,\rho_n\rangle$ 都完备，则 $\langle X,\rho\rangle$ 也完备．

(2) 如果 $\forall\, n\in\mathbf{N}$，$\langle X_n,\rho_n\rangle$ 都全有界，则 $\langle X,\rho\rangle$ 也全有界．

证 (1) 设 $\langle x^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 为 X 中的 Cauchy 序列，其中，$x^n=\langle x_i^n\rangle_{i\in\mathbf{N}}$．

对某个固定的 $k\in\mathbf{N}$，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, n_0\in\mathbf{N}$ s. t. 当 $m,n\geqslant n_0$ 时，

$$\rho(x^n,x^m)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\frac{\rho_i(x_i^n,x_i^m)}{1+\rho_i(x_i^n,x_i^m)}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2^k(1+\varepsilon)}.$$

从而可以推出 $\rho_k(x_k^n,x_k^m)<\varepsilon$. 即 $\langle x_k^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 是 X_k 中的 Cauchy 序列. 由 X_k 的完备性可知它收敛于某个 $x_k\in X_k$.

对每个 k 都如此做，由于 ρ 诱导的拓扑就是积拓扑，所以 $x=\langle x_k\rangle_{k\in\mathbf{N}}$ 就是 $\langle x^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 的极限. 于是 X 完备.

(2) $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, n_0\in\mathbf{N}$ s. t. $\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty}2^{-i}<\min\{1,\frac{\varepsilon}{2}\}$. 又 $\forall\, i\in\{1,2,\cdots,n_0\}$，存在有限子集 $F_i\subset X_i$ 使

$$X_i=\bigcup_{z\in F_i}B_{\rho_i}(z,\varepsilon/2).$$

取定一点 $a=\langle a_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in X$，令

$$F=\prod_{i=1}^{\infty}E_i,\ \text{其中}\ E_i=\begin{cases}F_i & i\leqslant n_0,\\ \{a_i\} & i>n_0.\end{cases}$$

则 F 有限.

任取 $y=\langle y_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in X$，

$\forall\, j\in\{1,2,\cdots,n_0\}$，$\exists\, x_j\in F_j$ s. t. $\rho_j(x_j,y_j)<\varepsilon/2$.

取 $x=\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n_0},\ a_{n_0+1},\ a_{n_0+2},\ \cdots,\ a_i,\ \cdots\rangle\in F$ 于是

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n_0}2^{-i}\cdot\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}2^{-i}\cdot\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}2^{-i}\rho_i(x_i,y_i)+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}2^{-i}$$

$$<\Big(\sum_{i=1}^{n_0}2^{-i}\Big)\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以

$$X=\bigcup_{x\in F}B_\rho(x,\varepsilon).$$

从而 X 是全有界的. □

注　由这一道题的结论可知，对于度量空间的可数族的积空间而言，可以不用 Tychonoff 乘积定理，直接证明：如果可数个度量空间 $\langle X_n,\rho_n\rangle(n\in\mathbf{N})$ 都是紧致的，那么 $\langle X,\rho\rangle$ 也紧致. 这是因为每个 $\langle X_n,\rho_n\rangle$ 都是完备的，全有界的，所以 $\langle X,\rho\rangle$ 也是完备的，全有界的，从而紧致. 这个证明的全过程都用不到选择公理.

由于这道题，我们立即可知 Fréchet 空间(B1. 2. 13)是完备的. 当然它作为可数无限个 E^1 的积空间（拓扑乘积），还可以由 A 中所列的有关积空间的定理直接可得其它的有关性质. 诸如连通性，第二可数(等价于可分)性等.

6. 1. 8　(1) 证明：当 $0<\mathrm{Card}\Lambda\leqslant 2^{\aleph_0}$ 时，积空间 $X=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 可分 $\Leftrightarrow\forall\,\lambda\in\Lambda$，$X_\lambda$ 可分.

(2) 举例说明当 $\mathrm{Card}\Lambda > 2^{\aleph_0}$ 时，充分性未必成立.

证 (1)"⇒" 由于投影连续，故对任意基数都成立.

"⇐" 第1步. 在自然数集 $\mathbf{N}$ 上取离散拓扑，$\{0,1\}$ 也取离散拓扑，则积空间 $T=\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ 是 Hausdorff 的，且 $\mathrm{Card}T=2^{\aleph_0}\geq\mathrm{Card}\Lambda$. 不妨假设 $\Lambda\subset T$ 且作为 T 的子空间. 现证 $\mathbf{N}^{\Lambda}$ 可分.

记 T 的定义基为 $\mathscr{B}$，易见 $\mathscr{B}$ 可数，令

$$\mathscr{A}=\{\{U_i\}_{i\leq k}\subset\mathscr{B}\mid i\neq j\Rightarrow U_i\cap U_j=\varnothing,\ k\in\mathbf{N}\},$$

则 $\mathscr{A}$ 可数，再令 $A\subset\mathbf{N}^{\Lambda}$ 为满足下述条件的 $f\in\mathbf{N}^{\Lambda}$ 的集合：

$\exists\ \{U_i\}_{i\leq k}\in\mathscr{A}$ s.t. f 在每个 U_i 上以及在 $\Lambda-\bigcup\limits_{i\leq k}U_i$ 上取常值.

则 $\mathrm{Card}\ A\leq\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$. 我们证明 $\overline{A}=\mathbf{N}^{\Lambda}$.

设 $y\in\mathbf{N}^{\Lambda}$，$B=\bigcap\limits_{i=1}^{k}p_{\lambda_i}^{-1}(G_{\lambda_i})$ 是 $\mathbf{N}^{\Lambda}$ 的定义基中包含 y 的任一成员，其中 $p_{\lambda_i}:\mathbf{N}^{\Lambda}\to\mathbf{N}_{\lambda_i}=\mathbf{N}$ 为投影，每个 $G_{\lambda_i}\subset\mathbf{N}$，也开于 $\mathbf{N}$.

现在 $\forall\ i\leq k$，$y_{\lambda_i}=p_{\lambda_i}(y)\in G_{\lambda_i}$.

不妨假定 $i\neq j$ 时，$\lambda_i\neq\lambda_j$（否则在 B 的表达式中，可以将此两项合并成一项）. 因 Λ 是 Hausdorff 的，故存在 $\{U_i\}_{i\leq k}\subset\mathscr{A}$ 使 $\forall\ i\leq k$，$\lambda_i\in U_i$. 定义 $g\in\mathbf{N}^{\Lambda}$ 如下：

$$g(\lambda)=\begin{cases}y_{\lambda_i} & \text{当}\ \exists\ i\leq k\ \text{s.t.}\ \lambda\in U_i\ \text{时},\\ y_{\lambda_1} & \text{当}\ \lambda\in\Lambda-\bigcup\limits_{i\leq k}U_i\ \text{时}\end{cases}$$

显然 $g\in A\cap B$，即 $A\cap B\neq\varnothing$. 所以 $y\in\overline{A}$. 于是 $\overline{A}=\mathbf{N}^{\Lambda}$.

第2步 $\forall\ \lambda\in\Lambda$，由假设 X_λ 有可数稠密子集 A_λ. 我们证明 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 作为 X 的子空间是可分的.

由于每个 A_λ 可数，故 $\forall\ \lambda\in\Lambda\ \exists$ 满射 $f_\lambda:\mathbf{N}\to A_\lambda$. 因 $\mathbf{N}$ 取离散拓扑，故每个 f_λ 连续. 令

$$f:\mathbf{N}^{\Lambda}\to\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda,\ \langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\mapsto\langle f_\lambda(x_\lambda)\rangle_{\lambda\in\Lambda},$$

由 B6.1.1知 f 连续. 由于每个 f_λ 是满的，所以 f 也是满的，由第1步已得 $\mathbf{N}^{\Lambda}$ 可分，所以 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 可分.

第3步 证 X 可分.

由第2步，可设 D 是 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 的可数的稠密子集. 于是

$$(\mathrm{Cl}_X D)\cap\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)=\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda.$$

所以

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\mathrm{Cl}_X D,$$

故有

$$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\prod_{\lambda\in\Lambda}\overline{A}_\lambda=\mathrm{Cl}_X\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\subset\mathrm{Cl}_X D,$$

从而

$$\mathrm{Cl}_X D=X.$$

即 X 可分.

(2) 在 $\mathbf{N}$ 上取离散拓扑,Λ 为指标集且 $\text{Card}\Lambda>2^{\aleph_0}$, $\forall\ \lambda\in\Lambda$ 令 $\mathbf{N}_\lambda=\mathbf{N}$, 则积空间 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{N}_\lambda=\mathbf{N}^\Lambda$ 不可分.

假定 X 有可数稠密子集 D,$\forall\ \lambda,\mu\in\Lambda$,$D\cap p_\lambda^{-1}(\{1\})$ 与 $D\cap p_\mu^{-1}(\{1\})$ 都是子空间 D 的既开又闭的子集. 且当 $\lambda\neq\mu$ 时,它们不相交. 定义映 $\varphi:\Lambda\to\mathscr{P}(D)$ 为 $\forall\ \lambda\in\Lambda$,

$$\varphi(\lambda)=D\cap p_\lambda^{-1}(\{1\}).$$

则 φ 是单射,所以 $\text{Card}\Lambda\leqslant\text{Card}\mathscr{P}(D)=2^{\aleph_0}$, 与假设矛盾. 从而证明了 X 不可分. □

6.1.9 证明积空间 I^I 是紧致的但不是序列紧的,其中 $I=[0,1]$.

证 由于 I 紧致, 故由 Tychonoff 乘积定理,I^I 也紧致.

$\forall\ n\in\mathbf{N}$, 定义 $\alpha_n\in I^I$(即 $\alpha_n:I\to I$)为

$$\forall\ x\in I,\ \alpha_n(x)=x \text{ 的二进制表示式中第 } n \text{ 个数字}.$$

(我们约定,当展开式出现循环时,除0外一律采用1循环,不用0循环).

现假定 I^I 的序列 $\langle\alpha_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$ 有收敛的子序列 $\langle\alpha_{n_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$, 其极限为 α. 由于积空间中序列收敛是按坐标收敛的(A6.1.3), 所以 $\forall\ x\in I$, I 中的序列 $\langle\alpha_{n_i}(x)\rangle_{i\in\mathbf{N}}\to\alpha(x)$.

如果取 $x\in I$ 使

$$\alpha_{n_i}(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } i \text{ 为奇数时},\\ 1 & \text{当 } i \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

即 x 的二进制展开式中第 n_i 个数字,当 i 为奇数时等于0,当 i 为偶数时等于1. 这样的 x 当然是存在的. 于是对于如此选取的 x,序列 $\langle\alpha_{n_i}(x)\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ 在 I 中是不收敛的,便得一矛盾. 因此证明了 I^I 不是序列紧的. □

注 这个例子表明:

(1) 序列紧性未必能被乘积保持(I 是序列紧的,但 I^I 不是序列紧的).

(2) 紧致(或可数紧)的拓扑空间未必是序列紧的.

(3) 在拓扑空间中一个序列有接触点(I^I 是紧致的,所以 I^I 的每个网都有接触点,序列是网的特例,所以 I^I 的每个序列都有接触点),未必有收敛的子序列.

6.1.10 证明积空间 $[0,\Omega)\times I^I$ 是可数紧的,非可分的,非 Lindelöf 的,非序列紧的,从而不是第一可数的.

证 由 B5.5.14 知 $[0,\Omega)$ 是序列紧的,又 I^I 是紧致的,当然是可数紧的,由 C4.3.11 知 $[0,\Omega)\times I^I$ 是可数紧的. 由于 $[0,\Omega)$ 不是可分的(B1.5.8),不是 Lindelöf 的(B5.5.14), I^I 不是序列紧的,所以 $[0,\Omega)\times I^I$ 既不是可分的,不是 Lindelöf 的,也不是序列紧的. 由于 $[0,\Omega)\times I^I$ 是可数紧而非序列紧,所以 $[0,\Omega)\times I^I$ 不是第一可数的. □

注 $[0,\Omega)\times I^I$ 的闭扩张(B1.4.1)不是 Liudelöf 的,不是第一可数的,却是可分的.

6.1.11 可数多个 $\mathbf{R}$ 的乘幂 $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ 习惯上记为 $\mathbf{R}^\omega$, 令

$$\mathscr{B}=\left\{\prod_{i\in\mathbf{N}}G_i\,\middle|\,\forall\ i,\ G_i \text{ 开于 } E^1\right\},$$

则由 $\mathscr{B}$ 为基可生成 $\mathbf{R}^\omega$ 的拓扑,记为 τ_b, 叫做 $\mathbf{R}^\omega$ 的箱拓扑,证明

(1) $\langle\mathbf{R}^\omega,\tau_b\rangle$ 不连通.

(2) $I^\omega=I\times I\times\cdots\times I\times\cdots$,作为 $\langle\mathbf{R}^\omega,\tau_b\rangle$ 的子空间不具有 B—W 性质,从而不是紧致的,

其中 $I=[0,1]$.

证 (1) 令 B 为 $\mathbf{R}$ 的所有有界序列构成的 $\mathbf{R}^\omega$ 的子集，$\forall\ x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in B$，$\exists\ M_x>0$，s.t. $\forall\ i\in\mathbf{N}$，$|x_i|<M_x$. 令 $J=(-M_x,M_x)$，便有 $x\in J^\omega\subset B$. 而 $J^\omega\in\mathscr{B}$，所以 B 为 $\langle\mathbf{R}^\omega,\tau_b\rangle$ 的开集.

如果 $x\in\mathbf{R}^\omega-B$，则

$$\exists\ i_1,\ \text{s.t.}\ |x_{i_1}|>1,$$

$$\exists\ i_2,\ \text{s.t.}\ i_2>i_1\ 且\ |x_{i_2}|>2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由归纳法，一般地.

$$\exists\ i_k,\ \text{s.t.}\ i_k>i_{k-1}\ 且\ |x_{i_k}|>k.$$

现按下述规则选取 J_i：

(i) 如果 $x_{i_k}>0$，取 $J_{i_k}=(k,+\infty)$；

(ii) 如果 $x_{i_k}<0$，取 $J_{i_k}=(-\infty,-k)$；

(iii) $\forall\ i\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots\}$，取 J_i 为任一包含 x_i 的开区间. 于是

$$x\in\prod_{i\in\mathbf{N}}J_i\subset\mathbf{R}^\omega-B.$$

所以 $\mathbf{R}^\omega-B\in\tau_b$，即 B 也是 $\langle\mathbf{R}^\omega,\tau_b\rangle$ 的闭集. 所以 $\langle\mathbf{R}^\omega,\tau_b\rangle$ 不连通.

(2) 令 $A=\{x^n=\langle x_i^n\rangle_{i\in\mathbf{N}}\,|\,n\in\mathbf{N}\}$，其中 $x_i^n=\delta_i^n$，即当 $i=n$ 时为1，$i\neq n$ 时为0. 也就是点 x^n 的第 n 个坐标为1，其余坐标皆为0，显然 A 是无限集，我们证 A 无聚点.

我们对 $\mathbf{R}^\omega$ 的点 $x=\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}$ 分下述情况进行考察：

(i) 若 $\exists\ x_j\notin\{0,1\}$，令 $\varepsilon=\min\{|x_j|,\ |x_j-1|\}$，$G_j=(x_j-\varepsilon,x_j+\varepsilon)$，$\forall\ i\neq j$ 任取 G_i 为包含 x_i 的开区间，则 $B\xlongequal{\text{def}}\prod_{i\in\mathbf{N}}G_i\in\mathscr{B}$，$x\in B$，且 $B\cap A=\varnothing$，故 $x\notin A'$.

(ii) 如果 $\exists\ j\neq k$ s.t. $x_j=x_k=1$，则令 $G_j=G_k=(0,2)$，$\forall\ i\notin\{j,k\}$ 时，任取 G_i 为包含 x_i 的开区间，则 x 的邻域 $B\xlongequal{\text{def}}\prod_{i\in\mathbf{N}}G_i$ 与 A 不相交，所以 $x\notin A'$.

(iii) 如果仅有 $x_j=1$，其余的 $x_i=0(i\neq j)$. 则令 $G_j=(0,2)$，$\forall\ i\neq j$，$G_i=(-1,1)$，就得 x 的邻域 $\prod_{i\in\mathbf{N}}G_i$ 与 $A-\{x\}$ 不相交，故也有 $x\notin A'$.

(iv) 最后剩下 $x=\langle 0,0,\cdots,0,\cdots\rangle$ 的情形，则 x 的邻域 $(-1,1)^\omega$ 与 A 不相交，故还是有 $x\notin A'$.

总之，无论如何总有 $x\notin A'$，即 A 无聚点. 因此 $\langle\mathbf{R}^\omega,\tau_b\rangle$ 不具有 B－W 性质. □

6.1.12 设 $\{\langle X_\lambda,\tau_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为一族拓扑空间，我们假定 $\mathrm{Card}\Lambda\geqslant\aleph_0$，令

$$\mathscr{B}=\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\,\middle|\,\forall\ \lambda,G_\lambda\in\tau_\lambda\right\}$$

以 $\mathscr{B}$ 为基可生成 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 上的一个拓扑，记作 τ_b，叫做 X 上的箱拓扑. 试问：在箱拓扑空间中一个网 ξ 收敛于一点 $x\in X$，是否等价于按坐标收敛于 x?

解 易见箱拓扑大于积拓扑，所以对箱拓扑而言，每个投影 $p_\lambda:X\to X_\lambda$ 也是连续的，因此当 ξ 收敛于 x 时，必有 $\forall\ \lambda$，$p_\lambda\circ\xi$ 收敛于 $p_\lambda(x)$. 也就是 ξ 若收敛，则 ξ 也是按坐标收敛

的．但反过来，如果 ξ 按坐标收敛，则 ξ 未必收敛．

我们考察箱拓扑空间 $\langle \mathbf{R}^\omega, \tau_b \rangle$ 中的网 $\xi: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^\omega$：

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \xi(n) = \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots, \frac{1}{n+i}, \cdots \rangle.$$

易见，$\forall\, i \in \mathbf{N}$，由第 i 个坐标构成的网

$$p_i \circ \xi = \langle p_i \xi(n) \rangle_{n \in \mathbf{N}} = \langle \frac{1}{n+i} \rangle_{n \in \mathbf{N}} \to 0,$$

即 ξ 是按坐标收敛的．但 $\langle 0,0,\cdots,0,\cdots \rangle$ 却不是 ξ 的极限点．事实上，对于包含 $\langle 0,0,\cdots,0,\cdots \rangle$ 的箱拓扑 τ_b 的基 $\mathscr{B}$ 中的元素

$$B = \prod_{i \in \mathbf{N}} \left(-\frac{1}{i^2}, \frac{1}{i^2} \right),$$

$\forall\, n \in \mathbf{N}$，总 $\exists\, i \in \mathbf{N}$, s.t. $i > n$，则 $i^2 > n+i$，即 $\frac{1}{i^2} < \frac{1}{n+i}$，从而 $p_i \xi(n) = \frac{1}{n+i} \notin (-\frac{1}{i^2}, \frac{1}{i^2})$．于是 $\xi(n) \notin B$．而 B 是 $\langle 0,0,\cdots,0,\cdots \rangle$ 的邻域．所以 $\langle 0,0,\cdots,0,\cdots \rangle$ 不是 ξ 的极限点． □

6.1.13　我们记 E^ω 为可数个 E^1 的积空间，$\mathbf{R}^\omega$ 为箱拓扑空间 $\langle \mathbf{R}^\omega, \tau_b \rangle$．

$$f: E^1 \to E^\omega,\ t \mapsto f(t) = \langle t, t, \cdots, t, \cdots \rangle \in E^\omega;$$

$$g: E^1 \to \mathbf{R}^\omega,\ t \mapsto g(t) = \langle t, t, \cdots, t, \cdots \rangle \in \mathbf{R}^\omega.$$

证明 f 连续而 g 不连续．

证　(1)　$\forall\, i \in \mathbf{N}$，$p_i \circ f = id_{E^1}$ 是连续的，故由 A6.1.2(2) 得 f 连续．

(2)　对于 g，取箱拓扑的基 $\mathscr{B}$ 中的成员

$$B = \prod_{i \in \mathbf{N}} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i} \right),$$

我们证明 B 的原像 $g^{-1}(B)$ 不是 E^1 的开集．

如果 $g^{-1}(B)$ 是 E^1 的开集，由于 $0 \in g^{-1}(B)$，故 $\exists\, \varepsilon > 0$ s.t. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset g^{-1}(B)$，于是

$$g((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset B.$$

所以 $\forall\, i \in \mathbf{N}$，$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$，这是不可能的．所以 $g^{-1}(B)$ 不是 E^1 的开集，从而 g 不连续． □

注　上述三道题揭示了箱拓扑与积拓扑的相异之处，这也正反映了箱拓扑的诸多弊端，尽管箱拓扑也是有限的乘积拓扑的一种推广，且看来比 Tychonoff 拓扑更加自然．历史上也曾经把它当作积拓扑看待，但是它所具有的诸多弊端是不能令人满意的，所以后来它就让位给Tychonoff拓扑了．

（二）常见错误分析

6.1.14　证明积空间 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 正则 $\Leftrightarrow \forall\, \lambda \in \Lambda, X_\lambda$ 都正则．

试分析下述证明中的错误所在：

(1)　必要性部分

$\forall\, \lambda_0 \in \Lambda$，$x_{\lambda_0} \in X_{\lambda_0}$，$F_{\lambda_0}$ 闭于 X_{λ_0} 且 $x_{\lambda_0} \notin F_{\lambda_0}$，则 $p_{\lambda_0}^{-1}(F_{\lambda_0})$ 闭于 X．取 $y = \langle y_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda}$，其中 $y_{\lambda_0} = x_{\lambda_0}$，则 $y \notin p_{\lambda_0}^{-1}(F_{\lambda_0})$．由 X 的正则性，存在 U, V 为定义基的成员，使 $y \in U$，$p_{\lambda_0}^{-1}(F_{\lambda_0}) \subset$

V，且 $U\cap V=\varnothing$，所以 $x_{\lambda_0}\in p_{\lambda_0}(U)$，$F_{\lambda_0}\subset p_{\lambda_0}(V)$. 显然 $p_{\lambda_0}(U)$，$p_{\lambda_0}(V)$都开于 X,且由 $U\cap V=\varnothing$,易证 $p_{\lambda_0}(U)\cap p_{\lambda_0}(V)=\varnothing$，这就证明了 X_{λ_0}是正则的.

(2) 充分性部分

[法一] 设 $x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\in X$，$F$ 闭于 X 且 $x\notin F$，于是$\exists\ \mu\in\Lambda$ s.t. $x_\mu\notin p_\mu(F)$. 由 X_μ 正则,存在 U_μ,V_μ 开于 X_μ 使 $x_\mu\in U_\mu$，$p_\mu(F)\subset V_\mu$，且 $U_\mu\cap V_\mu=\varnothing$，从而 $p_\mu^{-1}(U_\mu)$，$p_\mu^{-1}(V_\mu)$开于 X，且 $x\in p_\mu^{-1}(U_\mu)$，$F\subset p_\mu^{-1}(V_\mu)$，$p_\mu^{-1}(U_\mu)\cap p_\mu^{-1}(V_\mu)=\varnothing$. 所以 X 是正则的.

[法二] 设 $x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\in X$，$U$ 为包含 x 的开集,则$\forall\ \lambda\in\Lambda$，$x_\lambda\in p_\lambda(U)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}U_\lambda$. 由于 X_λ 正则,故存在开集 V_λ 使 $x_\lambda\in V_\lambda\subset\overline{V}_\lambda\subset U_\lambda$. 令 $V=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$，则

$$x\in V\subset\overline{V}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\overline{V}_\lambda\subset\prod_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda=U.$$

所以 X 是正则的.

分析 (1) 必要性部分

这个证明看来没有什么问题,但仔细一点就会发现对于 y 和不包含 y 的闭集 $p_{\lambda_0}^{-1}(F_{\lambda_0})$，由 X 的正则性只能断言存在 X 的不相交的开集 U,V 使 $y\in U$，$p_{\lambda_0}^{-1}(F_{\lambda_0})\subset V$，其中 U 是包含点 y 的开集,所以可取 U 为定义基的元. 而 V 是包含一个闭集的开集,就未必有定义基的元 V^* 使

$$p_{\lambda_0}^{-1}(F_{\lambda_0})\subset V^*\subset V,$$

所以 V 不能用定义基的元替代,从而就不能断言投影后仍不相交.

(2) 充分性部分

对[法一]看来似乎也没有什么错误,仔细一点就会发现:由于投影不必为闭映射,所以 $p_\mu(F)$不必闭于 X_μ. 这一段证明中的错误就在于误认为 $p_\mu(F)$也是 X_μ 的闭集或者根本就忘记了"闭"这个条件.

对[法二]两处有误. 其一,$U\neq\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}p_\lambda(U)$，一般地 $U\subset\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}p_\lambda(U)$，正因为这个缘故,所以常常要用定义基的元素来替代一般的开集进行讨论. 其二,V 未必是开集.

正确的证明如下:

(1) 必要性 $\forall\ \mu\in\Lambda$，取定一点 $x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\in X$，作$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda$，其中当 $\lambda=\mu$ 时,$Z_\lambda=X_\mu$，$\lambda\neq\mu$ 时,$Z_\lambda=\{x_\lambda\}$，那么$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Z_\lambda$ 与 X_μ 同胚. 由于正则性是遗传性质与拓扑性质,故由 X 的正则性,即得因子空间 X_μ 的正则性.

(2) 充分性 $\forall\ x\in X$ 以及 x 在 X 中的开邻域 U,存在定义基中的元$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$(此处体现了由一般的开集转化为定义基的元进行讨论)，使

$$x\in\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda\subset U,$$

其中 $\lambda\notin\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$时,$Y_\lambda=X_\lambda$.

$\forall\ \lambda_i$，$x_{\lambda_i}\in Y_{\lambda_i}$，且 $Y_{\lambda_i}\in\tau_{\lambda_i}$，由 X_{λ_i}的正则性,存在 V_{λ_i}开于 X_{λ_i}使

$$x_{\lambda_i}\in V_{\lambda_i}\subset\overline{V}_{\lambda_i}\subset Y_{\lambda_i},$$

当 $\lambda \notin \{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 时，取 $V_\lambda = X_\lambda$，则 $\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ 开于 X（注意，这个乘积恰好是定义基的一个成员故为开集．这是我们利用了定义基的元 $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ 的结果，与前面错误证明[法二]中所作的 V 不一样），且

$$x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \subset \overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{V}_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \subset U.$$

所以 X 正则． □

6.1.15　证明积空间 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 完全正则 $\Leftrightarrow \forall\ \lambda \in \Lambda$，$X_\lambda$ 完全正则．

试分析下述证明错在何处：

(1)　必要性　$\forall\ \lambda \in \Lambda$ 任取 $x_\lambda \in X$，F_λ 为 X_λ 中不包含 x_λ 的闭集，则 $F = \prod_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ 为 X 中不包含 $x = \langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ 的闭集，由 X 完全正则，存在连续映射 $f:X \to [0,1]$ 使 $f(x) = 0$，$f(F) \subset \{1\}$．由于 p_λ 是开映射，故 p_λ^{-1} 连续，令

$$f_\lambda = f \circ p_\lambda^{-1}: X_\lambda \to [0,1],$$

则 f_λ 连续，且 $f_\lambda(x_\lambda) = f(x) = 0$，$f_\lambda(F_\lambda) = f(F) \subset \{1\}$．所以 X_λ 完全正则．

(2)　充分性　[法一]　设 $x = \langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda} \in X$，$F$ 为 X 中不包含 x 的闭集，则 $\exists\ \mu \in \Lambda$ s.t. $x_\mu \notin F_\mu = p_\mu(F)$．由 X_μ 完全正则，存在连续映 $f_\mu: X_\mu \to [0,1]$ 使

$$f_\mu(x_\mu) = 0, \qquad f_\mu(F_\mu) \subset \{1\}.$$

令 $f = f_\mu \circ p_\mu$，则 f 连续，且

$$f(x) = f_\mu(x_\mu) = 0,$$
$$f(F) = f_\mu p_\mu(F) = f_\mu(F_\mu) \subset \{1\}.$$

所以 X 完全正则．

[法二]　任取 $x = \langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda} \in X$ 以及不含 x 的闭集 $\prod_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$，其中 F_λ 闭于 X_λ，则 $\exists\ \mu \in \Lambda$ s.t. $x_\mu \notin F_\mu$，故存在 $f_\mu: X_\mu \to [0,1]$ 连续使

$$f_\mu(x_\mu) = 0,\ f_\mu(F_\mu) \subset \{1\}.$$

如同[法一]中那样令 $f = f_\mu \circ p_\mu$，即合要求．

分析

(1)　必要性部分　错误之一是错把 p_λ^{-1} 当作映射了．另一错误是 $p_\lambda^{-1}(x_\lambda)$ 不应等于 x，$p_\lambda^{-1}(F_\lambda)$ 不应等于 F．这都是把 p_λ^{-1} 当成 p_λ 的逆映射而产生的错误．

(2)　充分性部分　对于[法一]，把 $p_\mu(F)$ 误认为 X_μ 的闭集了．对于[法二]，忽略了完全正则性条件中的闭集应是任意的，积空间中任意的闭集就未必是因子空间闭集的乘积了．

现将正确证明叙述如下：

必要性与 B6.1.14完全一样，只要把正则换成完全正则就可以了．

现证充分性．我们需要利用定义积拓扑的子基 $\mathscr{S}$，以及 A4.2.2的定理．要验证 $\forall\ x \in X$ 以及包含 x 的 $S \in \mathscr{S}$，存在连续映射 $f: X \to [0,1]$ 使

$$f(x) = 0, \qquad f(\mathscr{C}S) \subset \{1\}.$$

我们假定 $S = p_\lambda^{-1}(G_\lambda)$，$G_\lambda \in \tau_\lambda$．由于 $x_\lambda = p_\lambda(x) \in G_\lambda$，而 X_λ 完全正则，所以存在 $f_\lambda: X_\lambda \to$

$[0,1]$ 连续且使

$$f_\lambda(x_\lambda)=0,\ f_\lambda(\mathscr{C}G_\lambda)\subset\{1\}.$$

令

$$f=f_\lambda\cdot p_\lambda:X\to[0,1].$$

则 f 连续，且

$$f(x)=f_\lambda(x_\lambda)=0,$$

又 $\forall\ y\in\mathscr{C}S$，$y_\lambda=p_\lambda(y)\notin G_\lambda$，故

$$f(y)=f_\lambda\cdot p_\lambda(y)=f_\lambda(y_\lambda)=1,$$

所以

$$f(\mathscr{C}S)\subset\{1\}.$$

从而证明了 X 完全正则. □

6.1.16 证明可数多个拓扑空间的积空间 $X=\prod_{i\in\mathbf{N}}X_i$ 是可分的 $\Leftrightarrow\forall\ i\in\mathbf{N}$，$X_i$ 可分.

试分析下述证明错在何处.

必要性是显然的，只需证充分性.

$\forall\ i\in\mathbf{N}$，由于 X_i 可分，故存在可数的稠密子集 A_i，令 $A=\prod_{i\in\mathbf{N}}A_i$，则 A 可数且

$$\overline{A}=\overline{\prod_{i\in\mathbf{N}}A_i}=\prod_{i\in\mathbf{N}}\overline{A_i}=\prod_{i\in\mathbf{N}}X_i=X.$$

故 X 可分.

分析：可数多个可数集之并是可数的，有限多个可数集的笛卡儿积是可数的，但可数多个可数集的笛卡儿积就未必可数了，因为

$$\aleph_0^{\aleph_0}\geqslant 2^{\aleph_0}>\aleph_0.$$

所以上述证明的错误在于错把 A 当成可数集了.

错误并不一定是坏事，它往往是正确的先导，我们从中得到启发，一方面要考虑到可数性，就只能考虑有限的笛卡儿积，即让有限多个坐标在相应的 A_i 中任意变动，无限多个要让它固定下来. 另一方面，要考虑到稠密性，于是在相应的 A_i 中变动的这"有限"多个坐标，不能固定某个有限值，而要考虑一切可能的有限值. 基于这两方面的考虑得出正确的证明如下：

取定一点 $c=\langle c_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in X$，令

$$D_k=\{\langle x_i\rangle_{i\in\mathbf{N}}\in X\mid i\leqslant k\text{ 时},x_i\in A_i,\ i>k\text{ 时 }x_i=c_i\},$$

则 D_k 可数，令 $D=\bigcup_{k\in\mathbf{N}}D_k$，则 D 可数.

下面证明 $\overline{D}=X$.

$\forall\ x\in X$ 以及包含 x 的定义基的元 $\prod_{i\in\mathbf{N}}Y_i$，其中 $i>k$ 时，$Y_i=X_i$. 由于 $\overline{A_i}=X_i(\forall\ i)$，故 $Y_i\cap A_i\neq\varnothing$，当 $i\leqslant k$ 时，取 $y_i\in Y_i\cap A_i$，当 $i>k$ 时取 $y_i=c_i$，则

$$\langle y_1,y_2,\cdots,y_k,c_{k+1},c_{k+2},\cdots\rangle\in(\prod_{i\in\mathbf{N}}Y_i)\cap D_k.$$

所以 $(\prod_{i\in\mathbf{N}}Y_i)\cap D\neq\varnothing$. 从而 $x\in\overline{D}$，即 D 是 X 的可数稠密子集. X 是可分的. □

注 事实上，这道题是 B6.1.8 的特例. 由于是可数个空间的乘积，所以比 B6.1.8 要简

单.

现将各种性质是否能被乘积保持的结果总结成下表：

表 6.1.1

拓扑性质	C_I 与 C_{II}	可分	连通与道路连通	局部连通	$[T_0]$ | $[T_{3\frac{1}{2}}]$	$[T_4]$ 与 $[T_5]$	紧致	序列紧	可数紧	局部紧	Lindelöf
有限积	+	+	+	+	+	− 2	+	+	− 4	+	− 2
可数积	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	−
任意积	−	− 1	+	−	+	−	+	− 3	−	−	−

表中 C_I, C_{II} 分别表示第一，第二可数性，"+"号表示能被相应的乘积保持，"−"表示不能被相应的乘积保持. i 表示下述第 i 个反例. 没有列出反例的都可由相应定理的充要条件得到.

1 $\mathbf{N}^{\Lambda}$ 不可分，其中 Λ 不可数，$\mathbf{N}$ 为离散空间(B6.1.8).

2 $\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_S$.

3 I^I.

4 Novak 空间(见[5]).

C 练习题

6.1.1 设 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 为积空间，$\forall\ \lambda\in\Lambda$，$\mathscr{S}_\lambda$ 为 $\langle X_\lambda,\tau_\lambda\rangle$ 的子基，证明：$\mathscr{S}^*=\{p_\lambda^{-1}(S_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda,S_\lambda\in\mathscr{S}_\lambda\}$ 也是积拓扑的一个子基.

6.1.2 设 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 为积空间，$A_\lambda\subset X_\lambda$ 且 $A_\lambda\neq\varnothing(\forall\ \lambda\in\Lambda)$，记 $A=\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 证明：$A$ 作为 X 的子空间时的拓扑，与 A 作为诸 X_λ 的子空间 A_λ 的积空间时的积拓扑相同.

6.1.3 设 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 为积空间，$\Lambda_1\subset\Lambda$ 且 $\Lambda_1\neq\varnothing$ 定义

$$\pi:X\to\prod_{\lambda\in\Lambda_1}X_\lambda$$

为 $\forall\ x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}\in X$，$\pi(x)=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda_1}$. 证明 π 为连续的，开的满映射.

6.1.4 设 X 为非空集合，$\{\langle Y_\lambda,\tau_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族拓扑空间，$f_\lambda:X\to Y_\lambda(\forall\ \lambda\in\Lambda)$. 证明：

(1) X 上有一个使每个 f_λ 都连续的最小拓扑 τ.

(2) 由任一拓扑空间 Z 到 $\langle X,\tau\rangle$ 的映射

$$g:Z\to X \text{ 连续} \Leftrightarrow \forall\ \lambda\in\Lambda,\ f_\lambda\circ g:Z\to Y_\lambda \text{ 都连续}.$$

(3) 由 $f(x)=\langle f_\lambda(x)\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ 定义的映射

$$f:X\to\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda$$

是连续的，且 $\forall\ G\in\tau$，$f(G)$ 开于 $f(X)$.

6.1.5　设 X 为非空集合，$\{\langle Y_\lambda,\tau_\lambda\rangle\}$ 为拓扑空间族，$f_\lambda: X\to Y_\lambda(\forall\ \lambda\in\Lambda)$，令 τ 为 X 上由

$$\mathscr{S}=\{f_\lambda^{-1}(G_\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda,\ G_\lambda\in\tau_\lambda\}$$

为子基生成的拓扑，证明：

(1) 如果 $\langle X,\tau\rangle$ 是 T_0 的，那么 $\forall\ x,y\in X$ 且 $x\neq y$，$\exists\ f_\mu$ s.t. $f_\mu(x)\neq f_\mu(y)$.

(2) 如果 $\langle X,\tau\rangle$ 是 T_0 的，那么映射

$$e: X\to\prod_{\lambda\in\Lambda}Y_\lambda,\ x\mapsto e(x)=\langle f_\lambda(x)\rangle_{\lambda\in\Lambda}$$

是一个嵌入．

6.1.6　设 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 为积空间，如果有无限多个 X_λ 不连通，C 为 X 的连通子集，则 $\mathring{C}=\varnothing$. 如果将条件中前后两个"连通"的词语换成：可数紧，Lindelöf，可分，第一(二)可数，道路连通，局部连通，局部道路连通，局部紧，则都有 $\mathring{C}=\varnothing$.

6.1.7　设 $\{\langle X_\lambda,\tau_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为拓扑空间族，如果积集合 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda(\Lambda\neq\varnothing)$ 上的拓扑 τ 满足条件

$$\tau_p\subset\tau\subset\tau_b$$

其中 τ_p 为积拓扑，τ_b 为箱拓扑．证明：

(1) $\forall\ \lambda\in\Lambda$，$p_\lambda:\langle X,\tau\rangle\to\langle X_\lambda,\tau_\lambda\rangle$ 是连续的开映射．

(2) 如果 $\forall\ \lambda$，$A_\lambda\subset X_\lambda$，则

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Cl}_{\tau_\lambda}A_\lambda=\mathrm{Cl}_\tau\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda.$$

6.1.8　设 $A=\{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^\omega\,|\,\exists\ i\in\mathbf{N}\text{ s.t. }\forall\ n>i,\ x_n=0\}$，求 A 分别在积空间 E^ω 以及箱拓扑空间 $\langle\mathbf{R}^\omega,\tau_b\rangle$ 中的闭包．

§6.2　商空间与商映射

A　内容提要

6.2.1定义　设 $\langle X,\tau\rangle$ 为拓扑空间，r 为 X 上的等价关系，$q: X\to X/r$，$x\mapsto[x]$，以 x 为代表的等价类，称为自然映射，则

$$\mathscr{T}=\{G^*\subset X/r\,|\,q^{-1}(G^*)\in\tau\}$$

是 X/r 上的拓扑，称之为商拓扑，$\langle X/r,\mathscr{T}\rangle$ 就叫做 X 的(mod r)商空间．

6.2.2定义　设 $\langle X,\tau_X\rangle$，$\langle Y,\tau_Y\rangle$ 都是拓扑空间，如果 $f: X\to Y$ 为满射，且

$$G\in\tau_Y\Leftrightarrow f^{-1}(G)\in\tau_X,$$

则称 f 为商映射，即 τ_Y 是使 f 为连续的最大拓扑．

6.2.3定理　(1) 若 $\langle X/r,\mathscr{T}\rangle$ 是 $\langle X,\tau\rangle$ 的商空间，则自然映射 $q: X\to X/r$ 是商映射. 称

之为自然商映射.

(2) 如果$\langle X,\tau_X\rangle$、$\langle Y,\tau_Y\rangle$为拓扑空间，$f:X\to Y$为商映射，

$$r(f)\xlongequal{\text{def}}\{\langle x_1,x_2\rangle\in X\times X\mid f(x_1)=f(x_2)\},$$

则商空间$X/r(f)$与Y同胚. 称$X/r(f)$为$\forall\ y\in Y$在X中粘合$f^{-1}(\{y\})$为一点所得的商空间.

6.2.4定理 (1) 设$f:X\to Y$为连续的满的开映射(或闭映射)，则f是商映射.

(2) 设X为紧致空间，Y为Hausdorff空间，$f:X\to Y$为连续满射，则f为商映射，从而$X/r(f)$与Y同胚.

6.2.5定理 设X是局部连通(局部道路连通)空间，则商空间X/r也局部连通(局部道路连通).

6.2.6定理 若商空间X/r是Hausdorff的，则r是积空间的闭集；反之，若r是积空间的闭集，且$q:X\to X/r$是开映射，则X/r是Hausdorff的.

B 例题

6.2.1 在E^2的子空间$X=E^2-\{O\}$上定义一个等价关系：

$$r=\{\langle x,y\rangle\in X\times X\mid\exists\ t>0,\ \text{s.t.}\ x=ty\},$$

证明商空间X/r与E^2的子空间S^1同胚.

证 定义$f:E^2-\{O\}\to S^1$为$\forall\ x\in E^2-\{O\}$

$$f(x)=\frac{x}{\|x\|}.$$

则f为连续满射且$r=r(f)$. 现只需证f为商映射.

现设$G\subset S^1$，只需证：如果$f^{-1}(G)$开于$E^2-\{O\}$，那么G开于S^1.

设$y\in G$，任取$x\in f^{-1}(G)$ s.t. $y=f(x)$，则存在$\varepsilon>0$，s.t. E^2中的开球$B_{E^2}(x,\varepsilon)\subset f^{-1}(G)$. 由原点向$B_{E^2}(x,\varepsilon)$作两条切线交$S^1$于两点$y_1,y_2$，令

$$\delta=\|y-y_1\|=\|y-y_2\|,$$

则 $B_{E^2}(y,\delta)\cap S^1=f(B_{E^2}(x,\varepsilon))\subset ff^{-1}(G)=G$. 故$G$开于$S^1$，从而$f$为商映射. □

注 这一道题正是射影直线的一种描述方式，一般地射影空间P^n可定义为粘合S^n的对径的点所得的商空间，易见它同胚于粘合$E^n-\{O\}$的每一条通过原点的割断的直线为一点所得的商空间. 这一道题证明了P^1与S^1同胚. 然而，一般地，当$n\neq1$时，P^n与S^n不同胚，这需用代数拓扑的知识来证明.

6.2.2 设$X=\mathbf{R}\times\{0,1\}$为$E^2$的子空间，定义

$$\langle x_1,x_2\rangle r\langle y_1,y_2\rangle\Leftrightarrow(x_1=y_1,x_2=y_2)\ \text{或}\ (x_1=y_1>0).$$

易见r为X上的等价关系，证明商空间X/r的每一点有一个开邻域同胚于E^1，但X/r是T_1的，却不是Hausdorff的.

证 注意到X/r的几何意义就是将两条水平直线上横坐标大于0的对应点粘合在一起.

(1) $\forall\ x^*\in X/r$，设$\langle x_1,x_2\rangle\in X$且$q(\langle x_1,x_2\rangle)=x^*$. 取$a,b\in\mathbf{R}$ s.t. $a<x_1<b$且$a<$

$0<b$. 则

$$q^{-1}(q((a,b)\times\{x_2\}))=((a,b)\times\{x_2\})\cup((0,b)\times(\{0,1\}-\{x_2\})),$$

因上式右端开于 X，所以 $q((a,b)\times\{x_2\})$ 是 x^* 的开邻域. 令

$$h:(a,b)\to q((a,b)\times\{x_2\}),$$
$$t\mapsto h(t)=q(\langle t,x_2\rangle).$$

易见 h 为同胚，从而 $q((a,b)\times\{x_2\})$ 与 E^1 同胚.

(2) $\forall x^*\in X/r$，设 $x^*=q(\langle x_1,x_2\rangle)$，则

$$q^{-1}(\{x^*\})=\begin{cases}\{\langle x_1,x_2\rangle\} & x_1\leqslant 0,\\ \{\langle x_1,0\rangle,\langle x_1,1\rangle\} & x_1>0.\end{cases}$$

所以 $q^{-1}(\{x^*\})$ 闭于 X，故 $\{x^*\}$ 闭于 X/r. 于是 X/r 是 T_1 的.

(3) 设 U,V 分别为 X/r 中包含 $q(\langle 0,0\rangle)$，$q(\langle 0,1\rangle)$ 的开集. 则 $q^{-1}(U)$，$q^{-1}(V)$ 都是 X 的开集. 故 $\exists\ a,b,c,d\in\mathbf{R}$ s.t. $a<0<b$，$c<0<d$ 且

$$\langle 0,0\rangle\in(a,b)\times\{0\}\subset q^{-1}(U),$$
$$\langle 0,1\rangle\in(c,d)\times\{1\}\subset q^{-1}(V).$$

取 $e\in\mathbf{R}$ s.t. $0<e<\min\{b,d\}$，则

$$q(\langle e,0\rangle)=q(\langle e,1\rangle)\in U\cap V.$$

所以 $U\cap V\neq\varnothing$，故 X/r 不是 Hausdorff 的. □

注　一个拓扑空间 S 的每一点都有一个开邻域与 E^1 同胚，E^1 是 Hausdorff 的，所以局部地看 S 是 Hausdorff 的，粗略地想，也许会认为 S 就应是 Hausdorff 的，现在给出的例子正好否定了这个"想法". 尽管一个空间局部地是 Hausdorff 的，但整体上未必是 Hausdorff 的. 联系到流形的概念，一个拓扑空间 X，如果是 Hausdorff 的并且每一点都有一个开邻域与 n 维欧氏空间 E^n 的一个开集同胚，就叫 X 是 n 维流形(拓扑流形)，在流形的定义中 Hausdorff 的条件不能由其它条件推出.

6.2.3　在 E^1 上定义等价关系 $r=id_{\mathbf{R}}\cup(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})$. 证明

(1) $q:E^1\to E^1/r$ 是闭映射.

(2) E^1/r 是 Hausdorff 的.

(3) E^1/r 非局部紧，非第一可数.

证　(1)　设 F 闭于 E^1，则

$$q^{-1}(q(F))=\begin{cases}F & \text{当 } F\cap\mathbf{Z}=\varnothing \text{ 时},\\ F\cup\mathbf{Z} & \text{当 } F\cap\mathbf{Z}\neq\varnothing \text{ 时}.\end{cases}$$

可见，$q^{-1}(q(F))$ 也闭于 E^1，所以 $q(F)$ 闭于 E^1/r. q 为闭映射.

(2) $\forall x^*,y^*\in E^1/r$，$x^*\neq y^*$，设 $x^*=q(x)$，$y^*=q(y)$.

(i) 若 $\{x,y\}\subset\mathbf{R}-\mathbf{Z}$，则 $x^*=\{x\}$，$y^*=\{y\}$. 由于 $\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ 开于 E^1/r，且 E^1 是 Hausdorff 的，所以 $\exists\ U,V$ 开于 E^1 s.t. $x\in U$，$y\in V$，$U\cap V=\varnothing$ 且

$$U\cap\mathbf{Z}=\varnothing,\qquad V\cap\mathbf{Z}=\varnothing.$$

于是

$$q^{-1}(q(U))=U,\qquad q^{-1}(q(V))=V.$$

即有 $U^* \xlongequal{\text{def}} q(U)$，$V^* \xlongequal{\text{def}} q(V)$都开于 E^1/r 且

$$x^* \in U^*,\ y^* \in V^*,\ U^* \cap V^* = \varnothing.$$

(ii) 若 $x \in \mathbf{Z}$，则 $x^* = \mathbf{Z}$. 且由 $y^* \neq x^*$ 可知 $y \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$. 由于 E^1是正则的，$\mathbf{Z}$ 闭于 E^1，所以存在 U, V 开于 E^1使

$$y \in V,\quad \mathbf{Z} \subset U,\quad U \cap V = \varnothing.$$

于是也有

$$q^{-1}(q(U)) = U,\ q^{-1}(q(V)) = V.$$

从而 $U^* \xlongequal{\text{def}} q(U)$，$V^* \xlongequal{\text{def}} q(V)$ 开于 E^1/r 且 $x^* \in U^*$，$y^* \in V^*$，　$U^* \cap V^* = \varnothing$.

综上可知 E^1/r 是 Hausdorff 的.

(3) 由于 E^1/r 是 Hausdorff 的，如果 E^1/r 是局部紧的，则 E^1/r 中的点 $z^* = \mathbf{Z}$ 有一个开邻域 U 其闭包 $\mathrm{Cl}_{E^1/r}U$ 紧致. 在 E^1中，

$$\mathbf{Z} \subset q^{-1}(U) \subset q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^1/r}U).$$

由于 $q^{-1}(U)$开于 E^1，故$\forall\ n \in \mathbf{Z}$，$\exists$ 正数 $\varepsilon_n < \frac{1}{2}$ s. t. 区间 $(n-\varepsilon_n,\ n+\varepsilon_n) \subset q^{-1}(U)$. 令

$$G = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \left(n - \frac{\varepsilon_n}{2},\ n + \frac{\varepsilon_n}{2}\right),$$

则

$$\left\{n + \frac{\varepsilon_n}{2} \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}\right\} \subset q^{-1}(U) - G \subset q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^1/r}U) - G.$$

可见 $q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^1/r}U) - G$ 是 E^1中无界的闭子集. 故不是紧致的. 又据等价关系 r 的定义可见，

$$q|_{E^1 - \mathbf{Z}} : E^1 - \mathbf{Z} \to q(E^1 - \mathbf{Z})$$

同胚. 所以 $q(q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^1/r}U) - G)$不是 E^1/r 的紧致子集，但因 q 是闭映射，$\mathrm{Cl}_{E^1/r}U$ 紧致，则 $\mathrm{Cl}_{E^1/r}U$的闭子集 $q(q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^1/r}U) - G)$也应是紧致的，这就导致矛盾. 从而证明了 E^1/r 不是局部紧的.

再假定在 $z^* = \mathbf{Z} \in E^1/r$ 处有可数的开邻域基 $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$，则$\forall\ n \in \mathbf{N}$，$q^{-1}(U_n)$开于 E^1，且 $\mathbf{Z} \subset q^{-1}(U_n)$.

故$\forall\ n, m \in \mathbf{N}$，$\exists$ 正数 $\varepsilon_{n,m} < \frac{1}{2}$ s. t.

$$(n - \varepsilon_{n,m},\ n + \varepsilon_{n,m}) \subset q^{-1}(U_m),$$

令

$$G_n = \begin{cases} \left(n - \dfrac{1}{2},\ n + \dfrac{1}{2}\right) & n \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}, \\[2ex] \left(n - \dfrac{\varepsilon_{n,n}}{2},\ n + \dfrac{\varepsilon_{n,n}}{2}\right) & n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

$$G = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} G_n.$$

则 G 开于 E^1，且因 $\mathbf{Z} \subset G$，故有

$$q^{-1}(q(G)) = G.$$

从而 $q(G)$开于 E^1/r，为 z^* 的邻域. 但$\forall\ n \in \mathbf{N}$，

$$\left\{n + \frac{\varepsilon_{n,n}}{2}\right\} = q\left(n + \frac{\varepsilon_{n,n}}{2}\right) \in U_n,$$

而

$$\left\{n+\frac{\varepsilon_{n,n}}{2}\right\}\notin q(G).$$

这与$\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$为z^*的邻域基相矛盾. 从而E^1/r不是第一可数的. □

注 (1) 这个例子说明局部紧性,第一(二)可数性一般地不能被商空间保持.

(2) 证明E^1/r不是第一可数时,所用的技巧仍然是"对角线法则".

下面将给出在某种特定条件下商空间能保持某些分离性质,第一(二)可数性,局部紧性的两个例子.

6.2.4 设$\langle X,\tau_X\rangle$为拓扑空间,定义X上的等价关系

$$r=\{\langle x,y\rangle\in X\times X\mid \overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}\}.$$

证明 (1) $q:X\to X/r$是既开又闭的.

(2) 商空间X/r是T_0的.

(3) 如果X正则,那么X/r也正则,从而是T_3的.

(4) 如果X完全正则,那么X/r也完全正则,从而是Tychonoff的.

(5) 如果X正规,那么X/r也正规,从而如果X T_4,那么X/r也T_4.

证 (1) 设G开于X,要证$q(G)$开于X/r, 即证$q^{-1}(q(G))$开于X.

$$\forall\ y\in q^{-1}(q(G)),\ \exists\ x\in G\ \text{s.t.}\ q(x)=q(y),$$

即$\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$. 而$G\in\mathscr{N}_X(x)$, 所以$y\in G$, 故$q^{-1}(q(G))\subset G$, 从而$q^{-1}(q(G))=G$是$X$的开集.

再设F闭于X,要证$q(F)$闭于X/r, 即证$q^{-1}(F))$闭于X.

$$\forall\ y\in\overline{q^{-1}(q(F))}\text{及}\ U\in\mathscr{N}_X(y)\cap\tau_X,\ U\cap q^{-1}(q(F))\neq\varnothing.$$

设 $x\in U\cap q^{-1}(q(F))$, 则$\exists\ z\in F$ s.t. $q(x)=q(z)$, 即$\overline{\{x\}}=\overline{\{z\}}$, 而$U\in\mathscr{N}_X(x)$, 所以$z\in U$, 即$U\cap F\neq\varnothing$. 故$y\in\overline{F}=F$,于是

$$\overline{q^{-1}(q(F))}\subset F.$$

而

$$F\subset q^{-1}(q(F))\subset\overline{q^{-1}(q(F))},$$

所以 $\overline{q^{-1}(q(F))}=q^{-1}(q(F))=F$. 即得$q^{-1}(q(F))$是$X$的闭集. 至此我们不仅证明了$q$既是开映射又是闭映射,而且还有:如果$X$的子集$A$是开集(或闭集),那么$q^{-1}(q(A))=A$.

(2) 设$x^*=q(x)$,$y^*=q(y)$为X/r中两个不同的点,则$\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$, 故$\exists\ U\in\mathscr{N}_X(x)\cap\tau_X$ s.t. $y\notin U$, 或$\exists\ V\in\mathscr{N}_X(y)\cap\tau_X$ s.t. $x\notin V$.

由于

$$q^{-1}(q(U))=U,\qquad q^{-1}(q(V))=V.$$

所以存在x^*的邻域$q(U)$使$y^*\notin q(U)$, 或存在y^*的邻域$q(V)$使$x^*\notin q(V)$. 从而X/r是T_0的.

(3) 现假定X正则. 设$x^*=q(x)\in X/r$, $F^*\subset X/r$为不包含x^*的闭子集. 则$x\notin q^{-1}(F^*)$, 由X的正则性,$\exists\ U,V\in\tau_X$ s.t. $x\in U$, $q^{-1}(F^*)\subset V$, $U\cap V=\varnothing$. 于是$U^*\overset{\text{def}}{=\!=}q(U)$, $V^*\overset{\text{def}}{=\!=}q(V)$开于$X/r$且$x^*\in U^*$, $F^*\subset V^*$. 现只需证$U^*\cap V^*=\varnothing$. 如果$\exists\ z^*\in U^*$

$\cap V^*$，则$\exists$ $u\in U$, $v\in V$ s.t. $q(u)=z^*=q(v)$，所以$\overline{\{u\}}=\overline{\{v\}}$，于是$\{u,v\}\subset U\cap V$，与$U\cap V=\varnothing$矛盾. 这就证明了 X/r 是正则的，再由 X/r 是 T_0的，从而 X/r 是 T_3的.

(4) 现假定 X 是完全正则的. 设 x^*, F^* 如(3)所述. 则由 X 的完全正则性，存在 $f:X\to[0,1]$连续，使

$$f(x)=0, \qquad f(q^{-1}(F^*))\subset\{1\}.$$

定义 $f^*:X/r\to[0,1]$如下：

$$\forall\ z^*\in X/r,\ \text{任取}\ z\in q^{-1}(z^*),\ \text{令}\ f^*(z^*)=f(z).$$

如果 $y,z\in q^{-1}(z^*)$，则$\overline{\{y\}}=\overline{\{z\}}$. 由于 f 连续，故

$$f(y)\in f(\overline{\{y\}})=f(\overline{\{z\}})\subset\overline{f(\{z\})}=\{f(z)\}.$$

即 $f(y)=f(z)$，于是 f^*确实定义了一个映射. 并显然有 $f^*\circ q=f$. 所以 f^* 连续，并且

$$f^*(x^*)=f(x)=0,$$

$$\forall\ z^*\in F^*,\ \text{取}\ z\in q^{-1}(z^*),\ f^*(z^*)=f(z)=1.$$

所以 X/r 是完全正则的. 从而 X/r 是 Tychonoff 的.

(5) 假定 X 正规. 设 F_1^*, F_2^* 是 X/r 的两个不相交的闭子集，由 X 的正规性，存在 U_1, $U_2\in\tau_X$ s.t. $q^{-1}(F_i^*)\subset U_i$, $i=1,2$, 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$. 令 $U_i^*=q(U_i)$，则 U_i^* 开于 X/r、$F_i^*\subset U_i^*$，$i=1,2$,. 且 $U_1^*\cap U_2^*=\varnothing$. 所以 X/r 是正规的.

如果 X 是 T_4的，当然是 T_3的，故 X/r 也是 T_3的，所以 X/r 是 T_1的. 再由 X 正规得 X/r 正规，从而 X/r 也是 T_4的. □

6.2.5 设 X/r 是$\langle X,\tau\rangle$的商空间，证明：如果 $q:X\to X/r$ 是闭映射，且$\forall\ x\in X$, $[x]$都是 X 的紧致子集，那么当 X 分别是 Hausdorff，正则，第二可数，局部紧时，X/r 也相应地是 Hausdorff，正则，第二可数，局部紧的.

证 (1) 设 X 是 Hausdorff 的.

$$x^*=q(x),\ y^*=q(y)\in X/r,\ x^*\neq y^*.$$

由于$[x]=q^{-1}(x^*)$，$[y]=q^{-1}(y^*)$是 X 的两个不相交的紧致子集. 故$\exists$ $U,V\in\tau$ s.t. $[x]\subset U$, $[y]\subset V$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 又因 q 为闭映射，故

$$U_1\overset{\text{def}}{=\!=}X-q^{-1}q(\mathscr{C}U), \qquad V_1\overset{\text{def}}{=\!=}X-q^{-1}q(\mathscr{C}V),$$

开于 X，且易见 $U_1\subset U$, $V_1\subset V$，于是 $U_1\cap V_1=\varnothing$. 令

$$U^*=q(U_1), \qquad V^*=q(V_1),$$

则

$$q^{-1}(U^*)=q^{-1}q(U_1)=U_1, \quad q^{-1}(V^*)=V_1.$$

事实上，若$\exists$ $z\in q^{-1}q(U_1)$，但 $z\notin U_1$，则$\exists$ $u_1\in U_1$ s.t. $[z]=[u_1]$, $z\in\mathscr{C}U_1=q^{-1}q(\mathscr{C}U)$. 于是 $[z]\subset q^{-1}q(\mathscr{C}U)$，从而 $u_1\in q^{-1}q(\mathscr{C}U)$，与 $u_1\in U_1$矛盾. 故 $q^{-1}q(U_1)\subset U_1$. 而 $U_1\subset q^{-1}q(U)$是显然的，所以 $q^{-1}(U^*)=U_1$. 同理 $q^{-1}(V^*)=V_1$. 这就表明 U^*, V^* 是 X/r 的开集，且易见

$$x^*\in U^*,\ y^*\in V^*,\ U^*\cap V^*=\varnothing.$$

所以 X/r 是 Hausdorff 的.

(2) 设 X 正则，$x^*=q(x)\in X/r$, F^* 为 X/r 的不包含 x^* 的闭集，因 $[x]$ 紧致，

$q^{-1}(F^*)$闭于 X 且$[x]\cap q^{-1}(F^*)=\varnothing$. 由 X 正则可知 $\exists\, U,V\in\tau$, s. t. $[x]\subset U$, $q^{-1}(F^*)\subset V$, $U\cap V=\varnothing$, 如(1)可得U^*,V^*开于 X/r 使 $x^*\in U^*$, $F^*\subset V^*$且 $U^*\cap V^*=\varnothing$. 所以 X/r 是正则的.

(3) 设 X 第二可数,$\mathscr{B}$ 是 X 的可数基,记

$$\Phi=\{\mathscr{A}\subset\mathscr{B}\,|\,\mathscr{A}\text{ 有限}\},$$

则 Φ 可数.

$\forall\, x\in X$, 因$[x]$紧致, 故$\exists\,\mathscr{A}\in\Phi$ s. t. $[x]\subset\bigcup\mathscr{A}$. 记

$$\Phi_{[x]}=\{\mathscr{A}\in\Phi\,|\,[x]\subset\bigcup\mathscr{A}\}\subset\Phi,$$

$$\Psi=\bigcup\{\Phi_{[x]}\,|\,x\in X\}\subset\Phi.$$

设 $\mathscr{A}\in\Psi$, 则$\exists\, x\in X$ s. t. $\mathscr{A}\in\Phi_{[x]}$. 于是$\bigcup\mathscr{A}$ 开于 X 且$[x]\subset\bigcup\mathscr{A}$. 如同(1)中那样,令

$$G_{\mathscr{A}}=X-q^{-1}q(\mathscr{C}(\bigcup\mathscr{A})),\ G^*_{\mathscr{A}}=q(G_{\mathscr{A}}),$$

则 $[x]\subset G_{\mathscr{A}}\subset\bigcup\mathscr{A}$, $G^*_{\mathscr{A}}$ 开于 X/r, $q^{-1}(G^*_{\mathscr{A}})=G_{\mathscr{A}}$. 令

$$\mathscr{B}^*=\{G^*_{\mathscr{A}}\,|\,\mathscr{A}\in\Psi\},$$

则 $\mathscr{B}^*$是 X/r 的可数的开集族,我们证明 $\mathscr{B}^*$ 就是 X/r 的一个可数基.

设 G^* 开于 X/r, $x^*=q(x)\in G^*$, 要证 $\exists\, G^*_{\mathscr{A}}\in\mathscr{B}^*$ s. t. $x^*\in G^*_{\mathscr{A}}\subset G^*$.

$$\forall\, y\in[x]\subset q^{-1}(G^*),\ \exists\, B_y\in\mathscr{B}\text{ s. t. }y\in B_y\subset q^{-1}(G^*).$$

由$[x]$紧致, $\exists\, y_1,y_2,\cdots,y_n\in[x]$ s. t.

$$[x]\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_{y_i}\subset q^{-1}(G^*).$$

显然 $\mathscr{A}\xlongequal{\text{def}}\{B_{y_1},B_{y_2},\cdots,B_{y_n}\}\in\Phi_{[x]}\subset\Psi$. 于是 $G^*_{\mathscr{A}}\in\mathscr{B}^*$, 且

$$\begin{aligned}x^*&=q(x)\in q(G_{\mathscr{A}})=G^*_{\mathscr{A}}\\&\subset q(\bigcup\mathscr{A})\subset qq^{-1}(G^*)\subset G^*.\end{aligned}$$

所以 X/r 是第二可数的.

(4) 设 X 局部紧.

任取 $x^*=q(x)\in X/r$, $\forall\, y\in[x]$, 由 X 的局部紧性,存在紧致邻域 U_y, 由$[x]$紧致, $\exists\, y_1,\cdots,y_n$ s. t. $[x]\subset\bigcup_{i=1}^{n}\mathring{U}_{y_i}$. 如(1) 令 $U=X-q^{-1}q(\mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{n}\mathring{U}_{y_i}))$, 则 U 开于 X,且

$$[x]\subset U\subset\bigcup_{i=1}^{n}\mathring{U}_{y_i}\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i},$$

且 $U^*\xlongequal{\text{def}}q(U)$开于 X/r, 于是

$$x^*\in U^*\subset q(\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}),$$

$q(\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i})$就是 X/r 中 x^*的紧致邻域,这就证明了 X/r 是局紧的. □

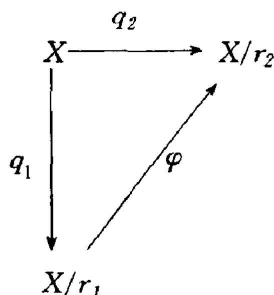
6.2.6 设 r_1,r_2是拓扑空间 X 上的两个等价关系,$r_1\subset r_2$, $q_i:X\to X/r_i$ 为自然商映射, $i=1,2$. 证明:$\forall\, x^*=q_1(x)\in X/r_1$,令

$$\varphi(x^*)=q_2(x),$$

则由此确定一个映射

$$\varphi: X/r_1 \to X/r_2,$$

它是商映射，从而$(X/r_1)/r(\varphi)$与X/r_2同胚.



证　首先，如果$x^* = q_1(x) = q_1(y)$，则$\langle x,y\rangle \in r_1 \subset r_2$，所以$q_2(x) = q_2(y)$，即$\varphi$的定义与代表元的选取无关，它确实定义了一个映射，且显然是满射.

由定义直接可见$q_2 = \varphi \cdot q_1$. 从而

G开于$X/r_2 \Leftrightarrow q_2^{-1}(G) = q_1^{-1}\varphi^{-1}(G)$开于$X$

$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(G)$开于$X/r_2$.

所以φ是商映射. □

注　这个例子有显明的几何意义. 按r_2粘合X的一些点构成商空间的这个过程，可以分解成两步进行，即先按$r_1(\subset r_2)$将需要在r_2之下粘合的一部分先粘合，然后再按$r(\varphi)$粘合其余需要粘合的部分. 这与r_2一次性粘合是等同的. 这个例子与C6.2.8是异曲同工的. 这在实际操作上是很有用的. 下一个例子就是它的一个应用.

6.2.7　设$C = S^1 \times [-1,1]$为柱面，取E^2的子空间拓扑，在C上定义等价关系：

$$r_2 = id_C \cup \{\langle p, -p\rangle \mid p \in C \cap YOZ\text{ 面}\} \cup \{\langle p,q\rangle \mid p,q\text{ 关于 }YOZ\text{ 面对称}\},$$

证明C/r_2同胚于 Möbius 带.

证　r_2的几何意义是将$C \cap YOZ$面上中心对称（关于原点）的点粘合成一点，并将C上关于YOZ面对称的点粘合成一点. 我们可以分成两步进行，第一步用YOZ面将C劈为两半，先把这两半关于YOZ面对称的点粘合起来，剩下YOZ面与C相交的两条棱没有粘合，所得图形从直觉上看同胚于矩形，第二步再将剩下的这两条棱上中心对称的点粘合起来，从同胚的角度看，就相当于反向粘合矩形的一对对边，因此最后的结果与 Möbius 带同胚. 现正式证明如下：令

$$r_1 = id_C \cup \{\langle p,q\rangle \mid p,q\text{ 关于 }YOZ\text{ 面对称}\},$$

$$Y = \{\langle x,y,z\rangle \in C \mid x \geqslant 0\},$$

$$g: C \to Y,\ \langle x,y,z\rangle \mapsto \langle |x|,y,z\rangle,$$

易见$r_1 = r(g)$，因C紧致，Y为 Hausdorff 的，g是连续满的，故由 A6.2.4(2)得$C/r(g) = C/r_1$与Y同胚.

由于$r_1 \subset r_2$，令$\varphi: C/r_1 \to C/r_2$使$q_2 = \varphi q_1$如 B6.2.6，即得C/r_2与$(C/r_1)/r(\varphi)$同胚.

又在C/r_1与Y同胚之下，$r(\varphi)$对应于Y反向粘合左右两条边，再者Y同胚于矩形$[-1,1]\times[-1,1]$并在这个同胚对应之下，反向粘合Y的左右两边恰好对应于反向粘合矩形$[-1,1]\times[-1,1]$的左右两边. 所以$(C/r_1)/r(\varphi)$同胚于反向粘合$[-1,1]\times[-1,1]$的左右两边所得的商空间，即 Möbius 带. □

6.2.8　设X,Y为拓扑空间，$f: X \to Y$是商映射，Z是局部紧的 Hausdorff 空间，证明

$$\varphi = f \times id_Z: X \times Z \to Y \times Z,\ \langle x,z\rangle \mapsto \langle f(x),z\rangle$$

也是商映射.

证　设$A \subset Y \times Z$，且$\varphi^{-1}(A)$开于$X \times Z$，我们证A开于$Y \times Z$.

任取$\langle y_0,z_0\rangle \in A$，则$\exists\ x_0 \in X$ s.t. $y_0 = f(x_0)$，故

$$\varphi(x_0,z_0) = \langle y_0,z_0\rangle.$$

即

$$\langle x_0,z_0\rangle \in \varphi^{-1}(A).$$

由于 $\varphi^{-1}(A)$ 开于 $X\times Z$，故∃ U_1 开于 X,W 开于 Z 使

$$\langle x_0,z_0\rangle \in U_1 \times W \subset \varphi^{-1}(A).$$

由于 Z 为局部紧的 Hausdorff 的，故也是正则的，于是，一方面 z_0 有一个开邻域 V_1，使 $\overline{V}_1$ 紧致，另一方面 z_0 有一个开邻域 W_1 使 $z_0\in W_1\subset\overline{W}_1\subset W$，令 $V=V_1\cap W_1$，则 V 为 z_0 的开邻域，且 $\overline{V}\subset\overline{W}_1\subset W$，又 $\overline{V}\subset\overline{V}_1$，故 $\overline{V}$ 也紧致.

这样便得到 $\langle x_0,z_0\rangle$ 的邻域 $U_1\times\overline{V}$ 使

$$U_1 \times \overline{V} \subset U_1 \times W \subset \varphi^{-1}(A),$$

且 $\overline{V}$ 紧致.

注意，我们的目的是要寻找 $\langle y_0,z_0\rangle=\langle f(x_0),z_0\rangle$ 的一个邻域，使它包含在 A 内，如果有 $U_1=f^{-1}f(U_1)$，那么 $f(U_1)$ 就是 Y 的开集，于是由 $f(U_1)\times W=\varphi(U_1\times W)\subset A$ 可知 $f(U_1)\times W$ 就已符合要求，而现在的问题恰恰是只有 $U_1\subset f^{-1}f(U_1)$，未必有 $U_1=f^{-1}f(U_1)$，所以才要借助于 Z 的局部紧性. 我们下面的工作就是要设法不断放大 U_1 到最佳状态成为 U，使 $U=f^{-1}f(U)$ 成立，为此，先用归纳法构造 X 中的开集序列 $\{U_n\}$ 使∀ $n\in\mathbf{N}$，

$$f^{-1}(f(U_n)) \times \overline{V} \subset U_{n+1} \times \overline{V} \subset \varphi^{-1}(A). \tag{6.2.8-1}$$

U_1 正如上面已经做的，由于 $U_1\times\overline{V}\subset\varphi^{-1}(A)$，容易验证也有 $f^{-1}f(U_1)\times\overline{V}\subset\varphi^{-1}(A)$.

现设∀ $n\leqslant i$, U_n 都已作出，并符合(6.2.8-1)的要求. 再作 U_{i+1} 如下：

∀ $x\in f^{-1}f(U_i)$，由归纳假设，$\{x\}\times\overline{V}\subset\varphi^{-1}(A)$，由 $\overline{V}$ 的紧致性，据管形引理(B54.4.9)，可选取 x 的一个开邻域 W_x 使

$$W_x \times \overline{V} \subset \varphi^{-1}(A).$$

现令

$$U_{i+1} = \bigcup_{x\in f^{-1}f(U_i)} W_x,$$

则 U_{i+1} 开于 X，且

$$f^{-1}f(U_i) \times \overline{V} \subset U_{i+1} \times \overline{V} \subset \varphi^{-1}(A).$$

由归纳原理，即得所要求的 $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，最后令

$$U = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n,$$

则 U 开于 X 且

$$\langle x_0,z_0\rangle \in U_1 \times \overline{V} \subset U \times \overline{V} \subset \varphi^{-1}(A).$$

$$U \subset f^{-1}f(U) = f^{-1}f(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_n)$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^{-1}f(U_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} U_{n+1} = U.$$

故 $f^{-1}f(U)=U$，于是 $f(U)$ 开于 Y. 从而

$$\varphi(U \times V) = f(U) \times V$$

开于 $Y\times Z$，且

$$\langle y_0,z_0\rangle \in \varphi(U \times V) \subset A.$$

从而 A 开于 $Y\times Z$.

再由 φ 的连续性即知，若 A 开于 $Y\times Z$，必有 $\varphi^{-1}(A)$ 开于 $X\times Z$. 这就证明了 φ 是商映射. □

注　一般地，若 $f:X\to Y$，$g:S\to T$ 为商映射，则

$$f\times g:X\times S\to Y\times T,\ \langle x,s\rangle\mapsto\langle f(x),g(s)\rangle$$

未必为商映射. 可见下例.

6.2.9　设 $X=E^1\times\mathbf{N}$ 作为 E^2 的子空间（即 E^1 与取离散拓扑的 $\mathbf{N}$ 的积空间），$Y=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}L_n$，其中

$$L_n=\{\langle x,nx\rangle\mid x\in\mathbf{R}\}$$

即为平面 $\mathbf{R}^2$ 上斜率为自然数 n 的直线.

$$f:X\to Y,\ \langle x,n\rangle\mapsto f(x,n)=\langle x,nx\rangle,$$

取 Y 的拓扑为使 f 连续的最大拓扑. 则 f 为商映射. 又 $id:E^\omega\to E^\omega$ 为恒同映射，当然是商映射，定义

$$\varphi=f\times id:X\times E^\omega\to Y\times E^\omega,$$

则 φ 不是商映射.

证　$\forall n\in\mathbf{N}$，令 $U_n\subset X\times E^\omega=(E^1\times\mathbf{N})\times E^\omega$ 为

$$U_n=\{\langle\langle t,n\rangle,\ \langle x_1,x_2,x_3,\cdots\rangle\rangle\mid |tx_n|<1\}.$$

则 U_n 是 $X\times E^\omega=(E^1\times\mathbf{N})\times E^\omega$ 的开集.

事实上，$(E^1\times\mathbf{N})\times E^\omega=(E^1\times\mathbf{N})\times(E^1\times E^1\times\cdots)$ 与 $(E^1\times E^1)\times(E^1\times\cdots\times E^1\times\mathbf{N}\times E\times\cdots)$ 同胚，即将 E^ω 中的第 n 个因子与 $\mathbf{N}$ 对调后，与原来的积空间同胚，在这个同胚对应之下，U_n 对应于

$$\begin{aligned}U_n^*&=\{\langle\langle t,x_n\rangle,\ \langle x_1,\cdots,x_{n-1},n,x_{n+1},\cdots\rangle\mid |tx_n|<1\}\\&=\{\langle t,x_n\rangle\mid |tx_n|<1\}\times(E^1\times\cdots\times E^1\times\{n\}\times E^1\times\cdots)\end{aligned}$$

其中第1个因子是 $E^1\times E^1$ 中的开集，第2个因子是 $E^1\times\cdots\times E^1\times\mathbf{N}\times E^1\times\cdots$ 中的开集，所以在同胚之下，U_n 是 $(E^1\times\mathbf{N})\times E^\omega$ 的开集.

现在令

$$U=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}U_n,$$

我们断言有下面的结果：

(1) $\varphi^{-1}\varphi(U)=U$，

(2) $\varphi(U)$ 不是 $Y\times E^\omega$ 的开集.

先证(1)：假定 $\varphi^{-1}\varphi(U)\neq U$，由于 $U\subset\varphi^{-1}\varphi(U)$，故必有 $x\in\varphi^{-1}\varphi(U)$ 使 $x\notin U$. 则 $\exists\ y\in U$ s.t. $\varphi(y)=\varphi(x)$. 而 $\varphi=f\times id$，故 x,y 在因子空间 $X=E^1\times\mathbf{N}$ 中的坐标 $\langle t_1,n_1\rangle\neq\langle t_2,n_2\rangle$，但

$$\langle t_1,n_1t_1\rangle=f(t_1,n_1)=f(t_2,n_2)=\langle t_2,n_2t_2\rangle.$$

于是 $t_1=t_2$，$n_1t_1=n_2t_2$，故 $(n_1-n_2)t_1=0$.

由于 $\langle t_1,n_1\rangle\neq\langle t_2,n_2\rangle$ 并已有 $t_1=t_2$，故必有 $n_1\neq n_2$，从而

$$t_1=t_2=0.$$

这就表明 x,y 必为下述形式的点：

$$x = \langle\langle 0, n_1\rangle, \langle x_1, x_2, x_3, \cdots\rangle\rangle,$$

$$y = \langle\langle 0, n_2\rangle, \langle x_1, x_2, x_3, \cdots\rangle\rangle.$$

而此时，$|0\cdot x_{n_1}| = 0 < 1$，$|0\cdot x_{n_2}| = 0 < 1$，故 x, y 都属于 U，导致矛盾. 所以 $\varphi^{-1}\varphi(U) = U$.

再证(2)：假定 $\varphi(U)$ 是 $Y\times E^\omega$ 中的开集，并易见 $\langle 0,0\rangle\in\varphi(U)$，从而必有包含 $\langle 0,0\rangle$ 的定义基的元素 $V\times\prod_{i\in\mathbf{N}} W_i\subset\varphi(U)$，其中 V 为 Y 中包含原点 O 的开集，W_i 是 E^1 的包含0的开集，并且除了有限个 i 之外，其余的 $W_i = E^1$. 于是我们总可以选取 $n\in\mathbf{N}$ s. t. $W_n = E^1$. 由于 $V\times\prod_{i\in\mathbf{N}} W_i\subset\varphi(U)$. 所以

$$f^{-1}(V)\times\prod_{i\in\mathbf{N}} W_i = \varphi^{-1}(V\times\prod_{i\in\mathbf{N}} W_i)$$
$$\subset\varphi^{-1}\varphi(U) = U.$$

而 $f^{-1}(V)$ 是 $X = E^1\times\mathbf{N}$ 中的开集，且 $\langle 0, n\rangle\in f^{-1}(V)$，故有 E^1 中包含0的开区间 (a,b) 使

$$(a,b)\times\{n\}\subset f^{-1}(V).$$

故∃ $t\in(0,b)$ 使 $\langle t, n\rangle\in f^{-1}(V)$. 我们选取 $x_n\in E^1 = W_n$ 使 $x_n > \frac{1}{t} = \frac{1}{|t|}$. 于是 $X\times E^\omega$ 中的点

$$\langle\langle t, n\rangle, \langle 0,\cdots,0,x_n,0,\cdots\rangle\rangle$$

一方面属于 $f^{-1}(V)\times\prod_{i\in\mathbf{N}} W_i\subset U$，另一方面又因 $|tx_n| = tx_n > 1$，它不属于 U，导致矛盾. 所以 $\varphi(U)$ 不是 $Y\times E^\omega$ 的开集.

结合(1),(2)即知 φ 不是商映射. □

关于商映射在子空间上的限制，即使同时限制取值空间，使之成为满射也未必仍是商映射. 可见下例.

6.2.10 设 $X = [0,1]\cup[2,3]$，$Y = [0,2]$ 都是 E^1 的子空间，定义 $f: X\to Y$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} x & x\in[0,1], \\ x-1 & x\in[2,3]. \end{cases}$$

则 f 是由紧致空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的连续满射，故为商映射. 考虑 X 的子空间 $A = [0,1]\cup(2,3]$ 以及

$$f^*: A\to f(A),\ x\mapsto f^*(x) = f(x),$$

则 f^* 不是商映射.

证 f^* 虽然是连续满射，但

$$f^{*-1}((1,2]) = (2,3]$$

是 A 的闭集，而 $(1,2]$ 却不是 $f(A) = Y$ 的闭集.

或由

$$f^{*-1}([0,1]) = [0,1],$$

其中等式右端的 $[0,1]$ 是 A 的开集，而等式左端括号中的 $[0,1]$ 却不是 $f(A) = Y$ 的开集，可见 f^* 不是商映射. □

关于商映射在子空间上的限制有下述结果常常是有用的.

6.2.11 设 $f: X\to Y$ 为商映射，A 为 X 的开(闭)子集，且存在 $B\subset Y$ 使 $A = f^{-1}(B)$

(注. 满足这个条件的 A 叫做 X 的关于 f 的饱和子集)则

$$f|_A:A\to f(A)$$

也是商映射.

证 现设 A 是 X 的关于 f 的饱和开集,$G\subset f(A)$.

如果 $(f|_A)^{-1}(G)$ 开于 A, 由于 A 开于 X, 故 $(f|_A)^{-1}(G)$ 也开于 X, 又因 A 饱和, 所以存在 $B\subset Y$ 使 $A=f^{-1}(B)$, 则 $f(A)\subset B$. 故 $G\subset B$. 于是,

$$f^{-1}(G)\subset f^{-1}(B)=A.$$

从而

$$f^{-1}(G)=(f|_A)^{-1}(G).$$

已知它开于 X. 由于 f 是商映射, 故 G 开于 Y. 当然有 G 开于 $f(A)$.

反过来, 直接由 $f|_A:A\to f(A)$ 连续可知若 G 开于 $f(A)$, 则有 $(f|_A)^{-1}(G)$ 开于 A. 所以

$$f|_A:A\to f(A)$$

是商映射.

对于 A 是饱和闭集时, 类似可证. □

6.2.12 在 E^2 上定义一个等价关系 r:

$$\langle x_1,y_1\rangle r\langle x_2,y_2\rangle\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$$

那么商空间 E^2/r 同胚于一个什么样的空间? 证明你的回答.

解 令 $\varphi: E^2\to[0,+\infty)$, $\langle x,y\rangle\mapsto(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$. 则 $r=r(\varphi)$. 显然 φ 为连续满射.

我们来证: $\forall\ G\subset[0,+\infty)$, 若 $\varphi^{-1}(G)$ 开于 E^2, 则 G 开于 $[0,+\infty)$.

$\forall\ x\in G$, $\langle x,0\rangle\in\varphi^{-1}(G)$, 所以 $\exists\ \varepsilon>0$, s.t.

$$B(\langle x,0\rangle,\varepsilon)\subset\varphi^{-1}(G).$$

于是当 $x'\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap[0,+\infty)$ 时,

$$\langle x',0\rangle\in B(\langle x,0\rangle,\varepsilon),\quad x'=\varphi(\langle x',0\rangle)\in G.$$

所以

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap[0,+\infty)\subset G.$$

故 G 开于 $[0,+\infty)$. 这就证明了 φ 是商映射, 从而 $E^2/r=E^2/r(\varphi)$ 同胚于 $[0,+\infty)$. □

注 由这一例子, 对于商空间的认识又可深入一步, 有时给定的等价关系从粘合角度看, 其几何直观性较强, 但有时并不十分明显, 此时, 可以通过构作商映射来显示其几何意义. 这一例子, 由解题过程可知其几何意义是将同一圆周上的点粘合为一点, 我们可以用 $[0,+\infty)$ 上的点作为粘合后的代表, 从而 E^2/r 与 $[0,+\infty)$ 的同胚是自然的.

6.2.13 设 X 正规, 自然映射 $q:X\to X/r$ 为闭映射, 则商空间 X/r 也正规.

证 设 F_i^* 闭于 X/r, $i=1,2$. $F_1^*\cap F_2^*=\varnothing$. 令 $F_i=q^{-1}(F_i^*)$, 则 F_i 闭于 X, $i=1,2$. 且 $F_1\cap F_2=\varnothing$. 由 X 正规得 $\exists\ U_i$ 开于 X s.t. $F_i\subset U_i(i=1,2)$ 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$. 令

$$U_i^*=X/r-q(X-U_i),\ i=1,2.$$

由于 q 为闭映射, 故 U_i^* 开于 X/r, $i=1,2$. 且

(1) $F_i^*\subset U_i^*(i=1,2)$,

(2) $U_1^*\cap U_2^*=\varnothing$.

事实上，由 $F_i=q^{-1}(F_i^*)$ 得 $X-F_i=q^{-1}(X/r-F_i^*)$，故

$$F_i^* = X/r - q(X-F_i) \subset X/r - q(X-U_i) = U_i^*.$$

又若 $q(x)\in U_1^*\cap U_2^*$，则 $q(x)\notin q(X-U_i)$，$i=1,2$. 从而 $x\in U_1\cap U_2$ 与 $U_1\cap U_2=\varnothing$ 矛盾.

由(1),(2)可知 X/r 是正规的. □

6.2.14 证明 n 维射影空间 P^n 是 n 维流形(参见 B6.2.1以及 B6.2.2后的注.)

证 (1) 先证 P^n 是 Hausdorff 的.

(i) 证自然映射 q 是开映射.

由于 S^n 的一个拓扑基为 $\{B(x,\varepsilon)\cap S^n \mid x\in S^n,\varepsilon>0\}$，其中 $B(x,\varepsilon)$ 为 E^{n+1} 中的开球. 而

$$q^{-1}(q(B(x,\varepsilon)\cap S^n)) = (B(x,\varepsilon)\cap S^n)\cup(B(-x,\varepsilon)\cap S^n)$$

开于 S^n，所以 $q(B(x,\varepsilon)\cap S^n)$ 开于 P^n，从而 q 为开映射.

(ii)

$$\begin{aligned} r &= \{\langle x,y\rangle \in S^n\times S^n \mid x=y \text{ 或 } x=-y\} \\ &= \{\langle x,x\rangle \mid x\in S^n\}\cup\{\langle x,-x\rangle \mid x\in S^n\}. \\ &= id_{S^n}\cup(-id_{S^n}) \end{aligned}$$

由 C4.1.6可知 id_{S^n} 与 $-id_{S^n}$ 都是积空间 $S^n\times S^n$ 的闭集. 所以 r 是 $S^n\times S^n$ 的闭集. 故由 A6.2.6知 $P^n=S^n/r$ 是 Hausdorff 的.

(2) 再证 P^n 的每一点都有一个开邻域与 E^n 的一个开子集同胚.

设 $x^*=q(x)\in P^n$，$x\in S^n$，取 $\varepsilon>0$ 充分小使当 $x'\in\overline{B(x,\varepsilon)\cap S^n}$ 时，$-x'\notin\overline{B(x,\varepsilon)\cap S^n}$. 记

$$A=\overline{B(x,\varepsilon)\cap S^n},$$

易见

$$q|_A:A\to q(A)$$

是一一的，连续的，由于 A 紧致，$q(A)$ 是 Hausdorff 的，所以 $q|_A:A\to q(A)$ 是同胚. 于是

$$q|_{B(x,\varepsilon)\cap S^n}:B(x,\varepsilon)\cap S^n\to q(B(x,\varepsilon)\cap S^n)$$

也是同胚，这就表明 x^* 有一个开邻域 $q(B(x,\varepsilon)\cap S^n)$ 与 S^n 的开集 $B(x,\varepsilon)\cap S^n$ 同胚. 而 S^n 是 n 维流形，所以 x 有一个开邻域 $U\subset B(x,\varepsilon)\cap S^n$ 与 E^n 的开集 V 同胚，从而 x^* 有一个开邻域 $q(U)$ 与 E^n 的开集 V 同胚，故 P^n 是 n 维流形.

特别地射影平面 P^2 是2维流形，通常一个连通的2维流形叫做曲面，所以 P^2 是紧致的曲面. □

6.2.15 设 $Z=(\mathbf{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbf{R})$，$g:E^2\to Z$ 定义为

$$g(x,y)=\begin{cases}\langle x,0\rangle & x\neq 0,\\ \langle 0,y\rangle & x=0.\end{cases}$$

证明 (1) 若 Z 作为 E^2 的子空间，则 g 不是商映射.

(2) 如果在 Z 上取使 g 为连续的最大拓扑 $\mathscr{T}$，则 $\langle Z,\mathscr{T}\rangle$ 不是 Hausdorff 的.

证 (1) 设 $F=\overline{B(\langle 0,0\rangle,\varepsilon)}\cap Z$，则 F 闭于 Z(Z 取子空间拓扑)，其中 $B(\langle 0,0\rangle,\varepsilon)$ 为 E^2 中的开球，又

$$g^{-1}(F) = ([-\varepsilon,0) \times \mathbf{R}) \cup ((0,\varepsilon] \times \mathbf{R}) \cup (\{0\} \times [-\varepsilon,\varepsilon])$$

不是 E^2 的闭集，所以 g 不连续，当然也就不是商映射.

(2) Z 的拓扑 $\mathscr{T}=\{G\subset Z \mid g^{-1}(G)$ 开于 $E^2\}$，设 $U,V\in\mathscr{T}$，且 $\langle 0,0\rangle\in U$，$\langle 0,1\rangle\in V$. 于是

$$\langle 0,0\rangle \in g^{-1}(U), \qquad \langle 0,1\rangle \in g^{-1}(V).$$

由于 $g^{-1}(U)$，$g^{-1}(V)$ 开于 E^2，故 $\exists\ \varepsilon_1,\varepsilon_2>0$，s.t.

$$\langle 0,0\rangle \in B(\langle 0,0\rangle,\varepsilon_1) \subset g^{-1}(U),$$

$$\langle 0,1\rangle \in B(\langle 0,0\rangle,\varepsilon_2) \subset g^{-1}(V),$$

令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，则

$$\langle \frac{\varepsilon}{2},0\rangle = g(\langle \frac{\varepsilon}{2},0\rangle) \in U \cap V.$$

所以 $\langle Z,\mathscr{T}\rangle$ 不是 Hausdorff 的. □

注　这个例子，直觉上是将平面上 y 轴以外的点都粘到有相同横坐标的 x 轴上，但由证明的结论(1)表明，这种直觉的粘合却不是商空间定义中所指的"科学意义上"的粘合，科学意义上的粘合应该是代表这种粘合的映射是商映射. 结论(2)表明要使直觉上的粘合成为科学意义的粘合，所得商空间就有可能失去直观意义(在直观意义上看 Z 应是 Hausdorff 的，在科学意义上就不是 Hausdorff 的. 这就告诉我们尽管在许多场合直观意义与科学意义是一致的，但毕竟是不同的. 直观不能代替科学的抽象. 要断定两者是否一致，还是作一番推理验证为好. 当然如果直观上的粘合是图形撕裂后才能实现的，那就可断定表示这种粘合的映射不是商映射.

C　练习题

6.2.1　设 $X=\{\langle x,y\rangle\in E^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 为 E^2 的子空间，$r=id_X\cup(S^1\times S^1)$. 证明商空间 X/r 同胚于 S^2(一般地，可设 X 为 $E^n(n\geqslant 1)$ 中的单位闭球体，$r=id_X\cup(S^{n-1}\times S^{n-1})$，则 X/r 同胚于 S^n).

6.2.2　设 $f:X\to Y$ 连续，$q:X\to X/r(f)$ 为自然商映射，定义 $g:X/r(f)\to Y$ 为

$$\forall\ x^* = q(x) \in X/r(f), \quad g(x^*) = f(x).$$

证明：(1) 若 Y 是 Hausdorff 的，则 $X/r(f)$ 也是 Hausdorff 的. (注. 这里没有要求 f 是商映射).

(2) 如果 g 是同胚，则 f 为商映射(此即 A6.2.3(2)的逆命题).

6.2.3　设 r 为拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 上的等价关系，证明：

(1) $q:X\to X/r$ 是闭映射 $\Leftrightarrow \forall\ A\subset X$，$\overline{r(A)}\subset r(\overline{A})$.

(2) q 是开映射 $\Leftrightarrow \forall\ A\subset X$，$r(\mathring{A})\subset(r(A))^\circ$.

6.2.4　在直线 E^1 上定义等价关系

$$r = id_{E^1} \cup (\mathbf{N}\times\mathbf{N}),$$

证明：

(1) 自然映射 $q:E^1\to E^1/r$ 是闭映射.

(2) $G^* \in \mathcal{N}_{E^1/r}(q(n))$ $(n\in\mathbf{N}) \Leftrightarrow \exists\ U$ 开于 E^1 s. t. $\mathbf{N}\subset U$ 且 $\{q(n)\}\cup\{\{x\}\mid x\in U-\mathbf{N}\}\subset G^*$ $(n\in\mathbf{N})$.

(3) E^1/r 在 $q(n)$ $(n\in\mathbf{N})$处不存在可数邻域基，从而 E^1/r 不是第一可数的.

6.2.5 设 $A=\{1,2,3\}$ 为三元集，定义 $f:E^1\to A$ 为

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0,\\ 2 & x<0,\\ 3 & x=0.\end{cases}$$

使 f 为商映射，求 A 的拓扑.

6.2.6 E^3中的环面可解析地表示为

$$T=\{\langle x,y,z\rangle\in E^3\mid(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\},$$

设 $X=[0,1]\times[0,1]$，定义 X 上的等价关系 r 为：

$$\langle x_1,x_2\rangle r\langle y_1,y_2\rangle\Leftrightarrow \text{下述(1),(2),(3) 之一成立：}$$

(1) $\langle x_1,x_2\rangle=\langle y_1,y_2\rangle$；

(2) $y_1=1-x_1$，且 $x_2=y_2$，其中 $x_1\in\{0,1\}$；

(3) $y_2=1-x_2$，且 $x_1=y_1$，其中 $x_2\in\{0,1\}$.

证明商空间 X/r 与 T 同胚.

6.2.7 设 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，f 为商映射，证明：

(1) g 是商映射$\Leftrightarrow g\cdot f$ 是商映射.

(2) g 连续$\Leftrightarrow g\cdot f$ 连续.

6.2.8 设 $Y=X/r_1$，$Z=Y/r_2$都是商空间，证明 Z 同胚于 X 的某一商空间.

6.2.9 设 $f:X\to Y$ 为商映射，若 A 为 X 的开(闭)子空间，又 f 是开(闭)映射，证明

$$g=f|_A:A\to f(A)$$

也是商映射.

6.2.10 设 $f:X\to Y$，$g:Z\to W$ 都是商映射，且 X 与 W 都是局部紧的 Hausdorff 空间，则

$$\varphi=f\times g:X\times Z\to Y\times W,$$
$$\langle x,z\rangle\mapsto\langle f(x),g(z)\rangle$$

也是商映射.

6.2.11 在 E^2上定义等价关系 r：

$$\langle x_1,y_1\rangle r\langle x_2,y_2\rangle\Leftrightarrow x_1+y_1^2=x_2+y_2^2,$$

则商空间 E^2/r 同胚于一个熟悉的空间 X，问 X 是一个什么样的空间？证明你的判断.

6.2.12 设 $X=([0,+\infty)\times\mathbf{R})\cup(\mathbf{R}\times\{0\})$是 E^2的子空间，$p_1:E^2\to E^1$，$\langle x,y\rangle\mapsto x$ 为投影，

$$f=p_1|_X:X\to E^1$$

证明 f 是商映射，但 f 既非开映射，又非闭映射.

§ 6.3 函数空间

A 内容提要

本节记 $\mathscr{F}(X,Y)=Y^X$，$\mathscr{C}(X,Y)$为 X 到 Y 的所有连续映射的集合.

6.3.1定义 设 Y 为拓扑空间，X 为非空集合，则称 $Y^X=\mathscr{F}(X,Y)$的积拓扑为 $\mathscr{F}(X,Y)$的按点收敛的拓扑，记作 τ_p，它有一个子基 $\mathscr{S}$ 的每个成员具有形式：

$$p_x^{-1}(G) = \{f \in \mathscr{F}(X,Y) \mid f(x) \in G\},$$

其中 $x\in X$，G 开于 Y，据此也称 τ_p 为点-开拓扑.

在$\langle \mathscr{F}(X,Y),\tau_p\rangle$中网 $\xi=\langle f_d\rangle_{d\in D}$收敛于 f 的充要条件是：$\forall x\in X$，$\langle f_d(x)\rangle_{d\in D}$收敛于 $f(x)$.

6.3.2定义 如果$\langle X,\tau_X\rangle$，$\langle Y,\tau_Y\rangle$都是拓扑空间，$\forall A\subset X, B\subset Y$，记

$$S(A,B) = \{f \in \mathscr{F}(X,Y) \mid f(A) \subset B\},$$

$$\mathscr{S} = \{S(C,G) \mid C \text{ 为 } X \text{ 的紧致子集}, G \in \tau_Y\},$$

以 $\mathscr{S}$ 为子基生成 $\mathscr{F}(X,Y)$的拓扑称为紧-开拓扑，记作 τ_C.

当 X,Y 都是拓扑空间时，显然 $\tau_p\subset\tau_C$.

6.3.3定理 如果 Y 正则，那么赋予紧-开拓扑的连续函数空间 $\mathscr{C}(X,Y)$也是正则的.

6.3.4定义 设 X 为非空集，$\langle Y,\rho\rangle$为度量空间，$\forall f\in\mathscr{F}(X,Y)$，$\varepsilon>0$，记

$$B(f,\varepsilon) = \{g \in \mathscr{F}(X,Y) \mid \forall x \in X,\ \rho(f(x),g(x)) < \varepsilon\},$$

以每个 $B(f,\varepsilon)$为相应的 $\mathscr{F}(X,Y)$中的元素 f 的邻域基生成的拓扑叫做在 X 上一致收敛的拓扑，记作 τ_u，应注意，这里 $B(f,\varepsilon)$只是 f 的邻域而非开邻域.

特别地，记 $\mathscr{B}(X,Y)=\{f\in\mathscr{F}(X,Y) \mid f \text{ 有界}\}$，所谓 f 有界即指 $f(X)$在 Y 中有界. $\forall f,g\in\mathscr{B}(X,Y)$，令

$$\rho^*(f,g) = \sup_{x\in X}\{\rho(f(x),g(x))\}.$$

以 ρ^* 为度量(称之为上确界度量)诱导的 $\mathscr{B}(X,Y)$上的拓扑就是 $\mathscr{B}(X,Y)$的一致收敛的拓扑，也就是作为$\langle\mathscr{F}(X,Y),\tau_u\rangle$的子空间时的拓扑.

易见，$\tau_p\subset\tau_u$. 故一个函数序列一致收敛(等价于在拓扑 τ_u 之下收敛)必按点收敛.

6.3.5定理 在$\langle\mathscr{F}(X,Y),\tau_u\rangle$中，$\mathscr{C}(X,Y)$与 $\mathscr{B}(X,Y)$都是闭集. 所以连续函数序列一致收敛的极限函数也连续；有界函数序列一致收敛的极限函数也有界.

6.3.6定义 设 X 为拓扑空间，$\langle Y,\rho\rangle$为度量空间，$F\subset\mathscr{F}(X,Y)$. 如果$\forall x\in X$ 以及 $\varepsilon>0\ \exists\ U\in\mathscr{N}_X(x)$ s. t. $\forall f\in F$ 及 $x'\in U$

$$\rho(f(x),\ f(x')) < \varepsilon,$$

则说 F 在 X 上等度连续.

6.3.7定理 设 X 为非空集，$\langle Y,\rho\rangle$为度量空间，$F\subset\mathscr{F}(X,Y)$在 X 上等度连续. 那么：

(1) F 在 $\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_p \rangle$ 中的闭包也等度连续.

(2) 如果 X 是紧致空间，则 F 由 $\mathscr{F}(X,Y)$ 的一致收敛的拓扑 τ_u 以及按点收敛的拓扑 τ_p 导出的子空间拓扑相同.

(3) 如果 X 是紧致空间，则 F 在 $\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_p \rangle$ 中的闭包与在 $\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_u \rangle$ 中的闭包相同.

6.3.8定理(Ascoli 定理)　设 X 为紧致空间，$\langle Y, \rho \rangle$ 为度量空间，在 $\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_u \rangle$ 中，$F \subset \mathscr{F}(X,Y)$ 满足下述条件：

(i) F 在 X 上等度连续，

(ii) $\forall\ x \in X$，$F(x) \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \{f(x) \mid f \in F\}$ 在 Y 中的闭包 $\overline{F(x)}$ 紧致，

(iii) F 为闭集，

那么 F 是紧致的.

B　例题

函数空间是直接以函数(映射)为“点”而建立的空间概念. 在定义空间 X 以及取值空间 Y 的基础上增加了一个层次. 做函数空间的问题，主要的要搞清楚各种拓扑结构的定义(即定义拓扑时所用的子基，基，邻域基等，不必要求知道开集的具体形式)，以及通过函数在某些点或某些子集处的值使定义空间 X，取值空间 Y 的行为与函数空间的行为联系起来，使两个层次间的信息相互传递.

6.3.1　证明：如果 X 为完全正则的 T_1 空间，那么 $\mathscr{C}(X,E^1)$ 在 $\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_p \rangle$ 中稠密.

证　$\forall\ f \in \mathscr{F}(X,E^1)$ 以及包含 f 的定义基的成员

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} \{g \mid g(x_i) \in U_i\},$$

其中 $\forall\ i$，$x_i \in X$，U_i 为 $f(x_i)$ 在 E^1 中的开邻域. 并不妨假定 $i \neq j$ 时，$x_i \neq x_j$.

我们证　$B \cap \mathscr{C}(X,E^1) \neq \varnothing$，即存在连续函数 $g: X \to E^1$ 使 $\forall\ i$，$g(x_i) \in U_i$，为此 $\forall\ i$，任取 $a_i \in U_i$，使 $a_i \neq 1$. 由于 $\forall\ i$，$\{x_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i\}$ 是不包含 x_i 的闭集，故存在连续函数 $g_i: X \to E^1$ 使 $g_i(x_i) = a_i$；$j \neq i$ 时，$g_i(x_j) = 1$.（这是根据 X 是完全正则的，T_1 的，以及 $[0,1]$ 与 $[a_i,1]$ 或 $[1,a_i]$ 同胚）.

$\forall\ x \in X$ 令 $g(x) = \prod_{i=1}^{n} g_i(x)$，则得连续函数 $g: X \to E^1$，且 $\forall\ i$，$g(x_i) = a_i \in U_i$. 从而 $f \in \overline{\mathscr{C}(X,E^1)}$.　□

6.3.2　设 X,Y 为拓扑空间，$\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_C \rangle$ 为赋予紧-开拓扑的函数空间，证明 Y 可以嵌入 $\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_C \rangle$.　□

证　记 $\mathscr{C}_0 = \{f \in \mathscr{F}(X,Y) \mid f$ 是常值的$\} \subset \mathscr{C}(X,Y)$.

$$\forall\ y \in Y,\ 令\ \varphi(y) \in \mathscr{C}_0\ 为\ \forall\ x \in X,\ \varphi(y)(x) = y.$$

由此定义了一个映射 $\varphi: Y \to \mathscr{C}_0$，显然 φ 是一一的. 又对 $\mathscr{C}_0$ 的每个子基元 $S(C,G) \cap \mathscr{C}_0$，显然有 $\varphi^{-1}(S(C,G) \cap \mathscr{C}_0) = G$，它开于 Y，所以 φ 连续.

现设 G 开于 Y，$f \in \varphi(G)$，任取 $x \in X$，则 $S(\{x\},G) \cap \mathscr{C}_0$ 开于 $\mathscr{C}_0$ 且

$$f \in S(\{x\},G) \cap \mathscr{C}_0 \subset \varphi(G),$$

所以 $\varphi(G)$ 开于 $\mathscr{C}_0$，故 φ 也是开映射，从而 Y 与 $\mathscr{C}_0$ 同胚，即 Y 可嵌入 $\langle \mathscr{F}(X,Y), \tau_C \rangle$（实际上我们证明了 Y 可嵌入 $\langle \mathscr{C}(X,Y), \tau_C \rangle$）. □

注　由这道题的结果可知，对任一遗传性质 P. 若 $\langle \mathscr{C}(X,Y), \tau_C \rangle$ 有 P，则 Y 也有 P.

6.3.3　设 $\mathbf{R}^\omega = \mathscr{F}(\mathbf{N}, E^1)$，$\tau_p, \tau_b, \tau_u$ 分别为 $\mathbf{R}^\omega$ 上按点收敛的拓扑（即积拓扑），箱拓扑，与一致收敛的拓扑.

（1）比较这三种拓扑.

（2）判断下述映射 $f,g,h: E^1 \to \mathbf{R}^\omega$ 在这三种拓扑下的连续性. f,g,h 的定义为：$\forall\, t \in E^1$，

$$f(t) = \langle t, 2t, 3t, \cdots, nt, \cdots \rangle,$$

$$g(t) = \langle t, t, t, \cdots, t, \cdots \rangle,$$

$$h(t) = \langle t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \cdots, \frac{1}{n}t, \cdots \rangle.$$

（3）判断下述序列 $\xi, \eta, \zeta, \beta: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^\omega$ 在这三种拓扑下的收敛性，它们的定义为 $\forall\, n \in \mathbf{N}$，

$$\xi(n) = \langle \underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1\text{个}}, n, n, \cdots \rangle,$$

$$\eta(n) = \langle \underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1\text{个}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots \rangle,$$

$$\zeta(n) = \langle \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}}_{n\text{个}}, 0, 0, \cdots \rangle,$$

$$\beta(n) = \langle \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots, 0, \cdots \rangle.$$

解　（1）　由于 τ_u 的每个邻域基的成员

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}^\omega \mid \forall\, i,\ |x_i - y_i| < \varepsilon\}$$
$$= \prod_{i \in \mathbf{N}} (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \in \tau_b.$$

所以，若 $G \in \tau_u$，必有 $G \in \tau_b$.

从而

$$\tau_p \subset \tau_u \subset \tau_b.$$

再由下面关于函数的连续性或序列收敛性的不同. 可得这三者是不等的.

（2）易见在 τ_p 之下 f,g,h 都连续，因为每个 $p_n f$，$p_n g$，$p_n h$ 都连续.

在 τ_u 之下，可证 f 不连续，g,h 连续.

事实上，$\forall\, t \in E^1$，$\varepsilon > 0$，

当 $t' \neq t$ 时，总 $\exists\, n \in \mathbf{N}$ s.t. $n|t - t'| > \varepsilon$，即

$$f(t') \notin B(f(t), \varepsilon).$$

对于 g,h，只要 $|t' - t| < \varepsilon$ 就有

$$f(t') \in B(f(t), \varepsilon), \qquad h(t') \in B(h(t), \varepsilon).$$

所以 f 不连续，而 g,h 连续.

在 τ_b 之下，$\forall\ t' \neq t$ 总$\exists\ n \in \mathbf{N}$ s.t.

$$\frac{1}{n}|t-t'| > \frac{1}{n^2}, \qquad 更有 \quad n|t-t'| > \frac{1}{n^2},\ |t-t'| > \frac{1}{n^2},$$

所以对于 τ_b 的包含 $\varphi(t)$的邻域基的成员

$$B = \prod_{n\in\mathbf{N}} (\varphi(t) - \frac{1}{n^2},\ \varphi(t) + \frac{1}{n^2}),$$

就有$\forall\ t' \neq t$，$\varphi(t') \notin B$. 其中 $\varphi(t)$分别表示 $f(t), g(t), h(t)$，所以 f, g, h 都不连续.

（3） 易见在 τ_p 之下，ξ, η, ζ, β 都收敛于$\langle 0,0,\cdots,0,\cdots\rangle$（因为在 τ_p 之下等价于按坐标收敛）.

由于 τ_u, τ_b 都大于 τ_p，所以在 τ_u, τ_b 之下每个投影 p_n 也都连续，从而 $\mathbf{R}^\omega$ 的每个序列在 τ_u，τ_b 之下收敛必按坐标收敛. 于是题中所给序列如果收敛，它们的极限只能是$\langle 0,0,\cdots,0,\cdots\rangle$. 故我们只需考察$\langle 0,0,\cdots,0,\cdots\rangle$是否为所给序列的极限（分别在 τ_u, τ_b 之下）.

在 τ_u 之下：

对于 ξ，$\forall\ \varepsilon > 0$，总$\exists\ n \in \mathbf{N}$ s.t. $n > \varepsilon$. 于是$\forall\ i \geqslant n$，总有 $\xi(i) \notin B(O, \varepsilon)$，其中 $O = \langle 0,0,\cdots,0,\cdots\rangle$. 所以 ξ 不收敛.

对于 η, ζ, β，$\forall\ \varepsilon > 0$，只要取 $n \in \mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. 就有$\forall\ i \geqslant n$ $\{\eta(i), \zeta(i), \beta(i)\} \subset B(O, \varepsilon)$. 所以 η, ζ, β 也都收敛于$\langle 0,0,\cdots,0,\cdots\rangle$.

在 τ_b 之下：

由于 $\tau_u \subset \tau_b$，故 ξ 在 τ_b 之下也不收敛.

对于 η, ζ，取 $B = \prod_{i\in\mathbf{N}}(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$ 为包含 O 的拓扑基的成员，则 $\forall\ n \in \mathbf{N}$，总有$\frac{1}{n} \notin (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$，所以 $\eta(n) \notin B$，$\zeta(n) \notin B$，从而 η, ζ 都不收敛.

对于 β，$\forall\ B = \prod_{i\in\mathbf{N}} G_i$，其中 G_i 开于 E^1，且 $0 \in G_i(\forall\ i)$，$\exists\ \varepsilon > 0$ s.t. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset G_1 \cap G_2$. 于是取 $n \in \mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{n} < \varepsilon$，则 $\forall\ i \geqslant n$ 就有 $\beta(i) \in B$，故 β 收敛于 O. □

注　由这一例子可见 τ_p 对函数连续性和序列收敛性的要求是自然的，是与有限乘积一致的，τ_u 的要求强一些，但我们已知在许多场合是有用的，而 τ_b 的要求就很苛刻了，竟然 g, h 都不连续，η, ζ 都不收敛，这样苛刻，不仅难以令人接受，而且也失去了实用意义，这也是一般不采用箱拓扑的原因之一.

6.3.4　设 X, Y 都是拓扑空间，又 Y 是完全正则的，那么 $\mathscr{C}(X, Y)$在紧-开拓扑下也是完全正则的（由 B6.3.2的注可见本例的逆命题也成立）.

证　我们先证两个引理：

引理1　设 C 为 X 的紧致子集，$\forall\ f \in \mathscr{C}(X, E^1)$，定义　$\Phi(f) = \sup_{x\in C} f(x)$，则在 $\mathscr{C}(X, E^1)$的紧-开拓扑之下，$\Phi: \mathscr{C}(X, E^1) \to E^1$连续.

引理1的证明　任取实数的开区间(a, b)要证 $\Phi^{-1}((a,b))$是$\langle \mathscr{C}(X, E^1), \tau_C \rangle$的开集，由于紧致集上的实值连续函数可以达到它的上确界，所以

$$\sup_{x\in C} f(x) < b \Leftrightarrow \forall\ x \in C,\ f(x) < b.$$

记 $A=(-\infty,a]$, $B=(-\infty,b)$, 则

$$\Phi^{-1}((a,b)) = \Phi^{-1}((a,+\infty)) \cap \Phi^{-1}((-\infty,b))$$
$$= (\mathscr{C}(X,E^1) - S(C,A)) \cap S(C,B).$$

其中集合 $S(E,G)$是指所有满足条件 $f(E)\subset G$ 的连续映射的集合. 在本题中都是这个意义. 现在 $S(C,B)$显然是$\langle\mathscr{C}(X,E^1),\tau_C\rangle$的开集,又因 A 闭于 E^1,所以 $S(C,A)$为闭集,即 $\mathscr{C}(X,E^1)-S(C,A)$为开集,从而证明了 Φ 连续.

引理2 设 X,Y,Z 为拓扑空间,取定 $g\in\mathscr{C}(Y,Z)$, $\forall f\in\mathscr{C}(X,Y)$,令 $\Psi(f)=gf$. 则当$\mathscr{C}(X,Y)$与$\mathscr{C}(Y,Z)$都赋予紧-开拓扑时,由此定义的映射

$$\Psi:\mathscr{C}(X,Y)\to\mathscr{C}(X,Z)$$

连续.

引理2的证明 任取$\mathscr{C}(X,Z)$的子基元 $S(C,G)$则

$$\Psi^{-1}(S(C,G)) = S(C,g^{-1}(G))$$

是$\mathscr{C}(X,Y)$的一个子基元,故为开集,从而 Ψ 连续.

现在证6.3.4 任取 $f\in\mathscr{C}(X,Y)$, 以及包含 f 的子基元 $S(C,G)$. 由于 $f(C)$是 Y 的紧致子集,且 $f(C)\subset G$. 故由 A4.4.3知$\exists$ $g\in\mathscr{C}(Y,[0,1])$ s.t. $g(f(C))=\{0\}$, $g(Y-G)\subset\{1\}$.

现$\forall$ $h\in\mathscr{C}(X,Y)$ 令

$$\Theta(h) = \Phi\Psi(h) = \sup_{x\in C} gh(x),$$

则由引理1,2知如此定义的映射

$$\Theta:\mathscr{C}(X,Y)\to[0,1]$$

连续,且易见 $\Theta(f)=\sup_{x\in C} gf(x)=0$.

$$\forall\ h\in\mathscr{C}(X,Y)-S(C,G),\ \exists\ x_h\in C\ \text{s.t.}\ h(x_h)\in Y-G,$$

所以

$$\Theta(h) = \sup_{x\in C} gh(x) = 1.$$

这就证明了$\langle\mathscr{C}(X,Y),\tau_C\rangle$是完全正则的. □

6.3.5 设 X 为局部紧的 Hausdorff 空间,Y 为拓扑空间,在$\mathscr{C}(X,Y)$上赋予紧-开拓扑. 证明:

(1) 由 $\varphi(x,f)=f(x)$定义的

$$\varphi:X\times\mathscr{C}(X,Y)\to Y$$

连续.

(2) 再设 Z 为一拓扑空间,则映射 $F:X\times Z\to Y$ 连续的充要条件是由 F 导出的映射

$$\hat{F}:Z\to\mathscr{C}(X,Y)$$

连续,其中$\hat{F}$定义如下:$\forall$ $z\in Z$. $\hat{F}(z)\in\mathscr{C}(X,Y)$为

$$(\hat{F}(z))(x) = F(x,z) \quad (\forall\ x\in X).$$

(3) 设 $f,g\in\mathscr{C}(X,Y)$, 则 f 与 g 同伦的充要条件是在$\langle\mathscr{C}(X,Y),\tau_C\rangle$中存在连接 f 与 g 的一条道路.(所谓 f 与 g 同伦是指存在 $F:X\times[0,1]\to Y$ 连续使 $\forall$ $x\in X$, $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$).

证 (1) $\forall \langle x,f\rangle\in X\times\mathscr{C}(X,Y)$以及$\varphi(x,f)=f(x)$在$Y$中的开邻域$V$,由$f$的连续性,$\exists\ x$的邻域$U_1$ s. t. $f(U_1)\subset V$.

又X是局部紧的Hausdorff的,故又$\exists\ x$的开邻域U_2 s. t. $\overline{U}_2$紧致. 令$U_3=U_1\cap U_2$,由局部紧的Hausdorff空间X是正则的,又$\exists\ X$的开集U s. t. $x\in U\subset\overline{U}\subset U_3\subset U_2\subset\overline{U}_2$. 从而$\overline{U}$也紧致,且

$$f(\overline{U})\subset f(U_3)\subset f(U_1)\subset V.$$

于是$\langle x,f\rangle\in U\times S(\overline{U},V)$. 故$U\times S(\overline{U},V)$是$X\times\mathscr{C}(X,Y)$中$\langle x,f\rangle$的开邻域. 又$\forall\ \langle y,g\rangle\in U\times S(\overline{U},V)$, $\varphi(y,g)=g(y)\in V$. 即$\varphi(U\times S(\overline{U},V))\subset V$.
故φ连续.

(2) 假定$\hat{F}$连续,则因

$$F=\varphi\cdot(id_X\times\hat{F}),$$

故F连续.

$$\begin{array}{ccc} X\times Z & \xrightarrow{F} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle id_X\times\hat{F}} & \nearrow{\scriptstyle\varphi} & \\ X\times W & & \end{array}$$

注 $W=\mathscr{C}(X,Y)$

反过来,假定F连续,要证$\hat{F}$连续. 我们设$z_0\in Z$, $S(C,G)$为$\mathscr{C}(X,Y)$中包含$\hat{F}(z_0)$的任一子基元,据$\hat{F}$的定义有$\forall\ x\in C$, $F(x,z_0)=(\hat{F}(z_0))(x)\in G$即$F(C,\{z_0\})\subset G$,由$F$连续知$f^{-1}(G)$是$X\times Z$中包含$C\times\{z_0\}$的开集,于是$F^{-1}(G)\cap(C\times Z)$是子空间$C\times Z$中包含$C\times\{z_0\}$的开集,由Wallace定理(B4. 4. 9)可得存在z_0在Z中一个开邻域W使

$$C\times W\subset F^{-1}(G)\cap(C\times Z)\subset F^{-1}(G).$$

于是$\forall\ z\in W,x\in C$, $F(x,z)\in G$,因此$\hat{F}(W)\subset S(C,G)$. 这正好表明$\hat{F}$在z_0处连续. 所以$\hat{F}$连续.

(3) 由f与g同伦,存在$F: X\times[0,1]\to Y$连续,使$\forall\ x\in X$, $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$,于是$\hat{F}:[0,1]\to\mathscr{C}(X,Y)$连续,且$\hat{F}(0)=f,\hat{F}(1)=g$. 即$\hat{F}$是$\mathscr{C}(X,Y)$中连接$f$与$g$的一条道路.

反过来,设在$\mathscr{C}(X,Y)$中存在连接f与g的道路$\hat{F}:[0,1]\to\mathscr{C}(X,Y)$,于是由$\forall\ x\in X$,令

$$F(x,t)=(\hat{F}(t))(x)$$

所定义的映射$F: X\times[0,1]\to Y$连续,且

$$F(x,0)=(\hat{F}(0))(x)=f(x),\quad F(x,1)=(\hat{F}(1))(x)=g(x).$$

故f与g同伦. □

注 映射间的同伦关系显然是个等价关系,在这个关系之下的等价类就叫做同伦类,于是由(3)可以推知由X到Y的连续映射的同伦类等价于赋予紧-开拓扑的连续函数空间$\mathscr{C}(X,Y)$中的道路连通分支. 紧-开拓扑在同伦论中是非常有用的.

在具有一致收敛拓扑的函数空间中,函数序列的收敛是在整个定义空间上一致收敛,这个条件是很强的. 在实用上有时只需要在X的某一类子集(或某些子集)上一致收敛就够了. 于是一般地可以如下来建立拓扑:

设 $\mathscr{E}$ 为 X 的一族子集，对于 $E\in\mathscr{E}$ 以及 $\varepsilon>0$令

$$B(f,\varepsilon,E)=\{g\in\mathscr{F}(X,Y)\mid\forall\ x\in E,\rho(f(x),g(x))<\varepsilon\}.$$

（我们仍然假定$\langle Y,\rho\rangle$为度量空间）. $\forall\ f\in\mathscr{F}(X,Y)$取一切形如 $B(f,\varepsilon,E)$的有限交组成的子集族为 f 的邻域基，由此生成的拓扑就叫做在 $\mathscr{E}$ 的成员上一致收敛的拓扑，($B(f,\varepsilon,E)$ 也叫 f 的邻域子基的成员). 在这个拓扑之下，函数序列的收敛就是在 $\mathscr{E}$ 的成员上一致收敛. 比较常用的，一是取 $\mathscr{E}$ 为 X 的全体紧致子集(当 X 是拓扑空间时)，所得拓扑就叫做在 X 的紧致子集上一致收敛的拓扑. 另一个是取 $\mathscr{E}$ 为 X 的全体有界子集(当 X 为度量空间时)，例如泛函分析中，对于定义在赋范线性空间上的有界线性算子序列依算子范数收敛的概念就等价于在定义空间的任一有界集上一致收敛，此时作为算子空间的相应的拓扑结构就可以取 $\mathscr{E}$ 为定义空间的全体有界子集构成的集族生成的拓扑，下一个例子给出的结果是很有用的.

6.3.6 设 X 为拓扑空间，$\langle Y,\rho\rangle$为度量空间，证明在 $\mathscr{C}(X,Y)$上赋予在紧致集上一致收敛的拓扑(记作 τ_K)与紧-开拓扑 τ_C 相同.

证 本题中记号 $S(A,B)$如同上题.

设 K 为 X 的紧致子集，G 为 Y 的开集，$f\in S(K,G)$，因 $f(K)\subset G$，故$\forall\ x\in K\ \exists\ \varepsilon(x)>0$ s.t. $B_\rho(f(x),\varepsilon(x))\subset G$，于是$\{B_\rho(f(x),\varepsilon(x)/2)\mid x\in K\}$为 $f(K)$在 Y 中的开覆盖，由于$f(K)$紧致，所以$\exists\ \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset K$ s.t.

$$f(K)\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_\rho(f(x_i),\varepsilon(x_i)/2)\subset G.$$

令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon(x_i)/2\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$. 考虑 $B(f,\varepsilon,K)$. $\forall\ g\in B(f,\varepsilon,K)$有$\forall\ x\in K\ \exists\ x_i\in K$, s.t.

$$\begin{aligned}&\rho(f(x),f(x_i))\leqslant\varepsilon(x_i)/2,\\&\rho(f(x_i),g(x))\leqslant\rho(f(x_i),f(x))+\rho(f(x),g(x))\\&\qquad<\varepsilon(x_i)/2+\varepsilon\leqslant\varepsilon(x_i)/2+\varepsilon(x_i)/2=\varepsilon(x_i).\end{aligned}$$

即 $g(x)\in B_\rho(f(x_i),\varepsilon(x_i))\subset G$，故 $g(K)\subset G$. 从而

$$f\in B(f,\varepsilon,K)\subset S(K,G).$$

这就表明 $S(K,G)\in\tau_K$，故有 $\tau_C\subset\tau_K$.

反之，假定 $f\in\mathscr{C}(X,Y)$，$B(f,\varepsilon,K)$为 f 的邻域子基的一个成员. 于是 $f(K)$紧致，因此可以选取 K 中有限个点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$使

$$\{B_\rho(f(x_i),\ \varepsilon/3)\ \mid i=1,2,\cdots,n\}$$

覆盖 $f(K)$. 令

$$\begin{aligned}K_i&=K\cap f^{-1}(\overline{B_\rho(f(x_i),\ \varepsilon/3)}),\\G_i&=B_\rho(f(x_i),2\varepsilon/3),\ i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

易见 K_i 是 X 的紧致子集，G_i 是 Y 的开子集. 下面我们要证明

$$f\in\bigcap_{i=1}^{n}S(K_i,G_i)\subset B(f,\varepsilon,K).$$

$\forall\ i$，经过计算可得

$$f(K_i)\subset\overline{B_\rho(f(x_i),\varepsilon/3)}\subset B_\rho(f(x_i),2\varepsilon/3)=G_i,$$

所以 $f\in\bigcap_{i=1}^{n}S(K_i,G_i)$.

又若 $g\in\bigcap_{i=1}^{n}S(K_i,G_i)$，则 $\forall\ i,g(K_i)\subset G_i$.

$\forall\ x\in K$，因 $f(K)\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_\rho(f(x_i),\varepsilon/3)$，故有

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(B_\rho(f(x_i),\varepsilon/3)\subset\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(\overline{B_\rho(f(x_i),\varepsilon/3)}),$$

即 $K=\bigcup_{i=1}^{n}K_i$，从而$\exists\ i$，s.t. $x\in K_i$. 于是

$$\rho(f(x),f(x_i))\leqslant\varepsilon/3,\qquad g(x)\in G_i=B_\rho(f(x_i),2\varepsilon/3),$$

即 $\rho(g(x),f(x_i))<2\varepsilon/3$. 所以

$$\begin{aligned}\rho(f(x),\ g(x))&\leqslant\rho(f(x),f(x_i))+\rho(f(x_i),g(x))\\&<\varepsilon/3+2\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而 $g\in B(f,\varepsilon,K)$，即有$\bigcap_{i=1}^{n}S(K_i,G_i)\subset B(f,\varepsilon,K)$.

而在 τ_K 之下 f 的每个邻域基的成员，就是有限个 $B(f,\varepsilon,K)$之交，现在每个 $B(f,\varepsilon,K)$ 又是在 τ_C 之下 f 的邻域，所以 f 在 τ_K 之下的每个邻域也都是在 τ_C 之下的邻域，从而 $\tau_K\subset\tau_C$.

综合上述两方面即得 $\tau_K=\tau_C$. □

注　作为上述结果的推论可得：

若 X 为紧致空间，Y 为度量空间，则在 $\mathscr{C}(X,Y)$上一致收敛的拓扑 τ_u 与紧-开拓扑 τ_C 相同，故此时在 $\mathscr{C}(X,Y)$中一个序列在 τ_u 之下收敛与在 τ_C 之下收敛是等价的，也就是此时一个连续函数序列如果在 τ_C 之下收敛，则必然是一致收敛的. 所以有时也叫紧-开拓扑为紧致收敛的拓扑.

6.3.7　设 X 为 E^n 中的有界闭集，$\langle Y,\rho\rangle$为度量空间，在 $\mathscr{C}(X,Y)$上取上确界度量 ρ^*. 证明$\forall\ f,g\in\mathscr{C}(X,Y)$，$f$ 与 g 同伦等价于 f 与 g 在 $\mathscr{C}(X,Y),\rho^*\rangle$中有道路相连.

证　因为 ρ^* 诱导的拓扑就是一致收敛的拓扑 τ_u，由于 X 紧致，故 $\tau_u=\tau_C$，故由 B6.3.5 (3)即得结论. □

6.3.8　证明 Ascoli 定理的经典形式：

设 X 紧致，在 $\mathscr{C}(X,E^n)$上取上确界度量 ρ^*，如果 $F\subset\mathscr{C}(X,E^n)$等度连续且为有界闭集，那么 F 是紧致的.

证　已知 ρ^* 诱导的拓扑就是一致收敛的拓扑 τ_u，又 F 闭于 $\mathscr{C}(X,E^n)$，$\mathscr{C}(X,E^n)$又闭于 $\langle\mathscr{F}(X,Y),\tau_u\rangle$ 故 F 闭于$\langle\mathscr{F}(X,Y),\tau_u\rangle$. 据 Ascoli 定理，只需验证$\forall\ x$，$F(x)=\{f(x)\mid f\in F\}$的闭包紧致，又因$\overline{F(x)}$是 E^n 的闭集，故只需证$\overline{F(x)}$有界.

$$\forall\ y_1,y_2\in\overline{F(x)},\ \exists\ f_1,f_2\in F\ \text{s.t.}$$

$$\|y_1-f_1(x)\|<1/2,\quad\|y_2-f_2(x)\|<1/2\ .$$

又 F 在上确界度量 ρ^* 之下有界，所以$\exists\ M>0$，s.t. $\forall\ f,g\in F$，$\rho^*(f,g)<M$. 即 $\forall\ x'\in X$，$\|f(x')-g(x')\|<M$. 从而，

$$\|y_1-y_2\|\leqslant\|y_1-f_1(x)\|+\|f_1(x)-f_2(x)\|+\|f_2(x)-y_2\|$$

$$< M + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = M + 1.$$

所以$\overline{F(x)}$有界. 据 Ascoli 定理(A6.3.8) 即得 F 紧致. □

6.3.9(Arzelà 引理) 设$\langle f_n \rangle_{n\in \mathbf{N}}$为定义在闭区间$[a,b]$上的实值函数序列，如果$\{f_n | n\in \mathbf{N}\}$等度连续，且在$[a,b]$上一致有界，即$\exists$ $M>0$ s.t. $\forall$ $x\in [a,b]$及$\forall$ $n\in \mathbf{N}$, $|f_n(x)|<M$，那么必有$\langle f_n \rangle_{n\in \mathbf{N}}$的子序列在$[a,b]$上一致收敛.

证 [法一] 对照 Ascoli 定理，记 $G=\{f_n | n\in \mathbf{N}\}$, $F=\mathrm{Cl}_{\tau_u}G$,则 F 等度连续(A6.3.7). 现只需证$\forall$ $x\in X$. $\overline{F(x)}$有界，这与 B6.3.8类似，读者自行补上. 于是由 Ascoli 定理即得 F 紧致. 由于$\langle \mathscr{F}([a,b],E^1),\tau_u \rangle$是第一可数的，故子空间 F 也是第一可数的，所以 F 也序列紧. 于是$\langle f_n \rangle_{n\in \mathbf{N}}$有收敛(在 τ_u 之下)的子序列$\langle f_{n_i} \rangle_{i\in \mathbf{N}}$，也就是$\langle f_{n_i} \rangle_{i\in \mathbf{N}}$在$[a,b]$上一致收敛.

[法二] 令 $F=\mathrm{Cl}_{\tau_u}G$(如上)，由于 F 等度连续，所以 $F\subset \mathscr{C}([a,b],E^1)$. 在 $\mathscr{C}([a,b],E^1)$上取上确界度量 ρ^*，则 ρ^* 诱导的拓扑正是一致收敛的拓扑. 所以 F 在$\langle \mathscr{C}([a,b],E^1),\rho^* \rangle$中是闭的，对照 Ascoli 定理的经典形式(即 B6.3.8)只需验证 F 在 ρ^* 的意义下有界，读者可自行补上. 于是可得 F 紧致. 在度量拓扑下等价于序列紧. 所以$\langle f_n \rangle_{n\in \mathbf{N}}$有一致收敛的子序列. □

6.3.10 设 X 为非空集，$\langle Y,\rho \rangle$为度量空间，定义

$$d:\mathscr{F}(X,Y) \times \mathscr{F}(X,Y) \to \mathbf{R}$$

为$\forall$ $f,g\in \mathscr{F}(X,Y)$

$$d(f,g) = \sup\{\min\{\rho(f(x),g(x)),1\} | x \in X\}.$$

容易验证 d 为 $\mathscr{F}(X,Y)$上的度量. 证明由 d 诱导的拓扑 τ_d 与一致收敛拓扑 τ_u 相等.

证 设 $G\in \tau_d$, $\forall$ $f\in G$ $\exists$ $\varepsilon\in (0,1)$ s.t.

$$f \in B_d(f,\varepsilon) \subset G.$$

考虑 f 在 τ_u 之下邻域基的成员 $B(f,\varepsilon/2)$, $\forall$ $g\in B(f,\varepsilon/2)$. $\forall$ $x\in X$, $\rho(f(x),g(x)) <\varepsilon/2$, 所以

$$d(f,g) = \sup\ \{\min\{\rho(f(x),g(x)),1\} | x \in X\} \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

故 $f\in B(f,\varepsilon/2)\subset B_d(f,\varepsilon)\subset G$. 于是, $G\in \tau_u$, $\tau_d\subset \tau_u$.

反过来，若 $G\in \tau_u$,$\forall$ $f\in G$ $\exists$ $\varepsilon\in (0,1)$, s.t.

$$f \in B(f,\varepsilon) \subset G.$$

考虑在 d 之下 f 的球形邻域 $B_d(f,\varepsilon)$, $\forall$ $g\in B_d(f,\varepsilon)$ 因

$$\sup\{\min\{\rho(f(x),g(x)),\ 1\} | x \in X\} = d(f,g) < \varepsilon,$$

故$\forall$ $x\in X$, $\rho(f(x),g(x))<\varepsilon$, 即 $g\in B(f,\varepsilon)$. 所以 $B_d(f,\varepsilon)\subset G$, $G\in \tau_d$, 故 $\tau_u\subset \tau_d$. 从而 $\tau_u=\tau_d$. □

注 由这一道题的结论可知一致收敛的拓扑是可度量化的. 不过这个结论是在$\langle Y,\rho \rangle$为度量空间的条件下得到的. 如果将度量空间$\langle Y,\rho \rangle$换成伪度量空间或更广泛的所谓一致空间，这时的 τ_u 就未必可度量化了. 将度量空间换成概率度量空间也可以定义一致收敛的拓扑. 可以得到与 Y 为度量空间时一系列平行的结果. 读者不妨一试.

6.3.11 证明在 $\mathbf{R}^\omega=\mathscr{F}(\mathbf{N},E^1)$上赋予一致收敛的拓扑 τ_u, 则$\langle \mathbf{R}^\omega,\tau_u \rangle$是第一可数的，但非第二可数的.

证　由 τ_u 的定义，或由上例均可知是第一可数的. 只需证非第二可数.

令 $C=\{0,1\}^{\mathbf{N}}\subset\mathbf{R}^{\omega}$. 假定 $\mathscr{B}$ 是 τ_u 的任意一个基，则

$$\forall\, x\in C,\ \exists\, B_x\in\mathscr{B}\ \text{s.t.}\ x\in B_x\subset B_d(x,1),$$

其中 d 为 B6.3.10中定义的度量. 于是

$$\mathscr{B}_x=\{B_x\in\mathscr{B}\ x\in B_x\subset B_d(x,1)\}\neq\varnothing.$$

令　$c:C\to\bigcup_{x\in C}\mathscr{B}_x$，为选择函数，当 $x,y\in C$ 且 $x\neq y$ 时，记

$$c(x)=B_x,\ c(y)=B_y.$$

因 $d(x,y)=1$，故 $x\notin B_d(y,1)$，从而 $x\notin B_y$. 所以 $B_x\neq B_y$. 即 $c(x)\neq c(y)$. 于是 c 为单射，而 C 不可数，从而 $\mathscr{B}\supset\bigcup_{x\in C}\mathscr{B}_x$ 不可数. □

6.3.12　设 d 为 B6.3.10定义的 $\mathbf{R}^{\omega}$ 上的度量，给定 $x=\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^{\omega}$ 及 $0<\varepsilon<1$，令

$$B(x,\varepsilon)=\prod_{n\in\mathbf{N}}(x_n-\varepsilon,x_n+\varepsilon),$$

证明：

(1) $B(x,\varepsilon)\neq B_d(x,\varepsilon)$.

(2) $B(x,\varepsilon)$不是$\langle\mathbf{R}^{\omega},\tau_u\rangle$中的开集.

(3) $B_d(x,\varepsilon)=\bigcup_{\delta<\varepsilon}B(x,\delta)$.

证　(1)　取 $k\in\mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{k}<\varepsilon$，令

$$y_n=x_n+(\varepsilon-\frac{1}{k+n})\quad(n\in\mathbf{N}),$$

则 $y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in B(x,\varepsilon)$. 因

$$d(x,y)=\sup\left\{\varepsilon-\frac{1}{k+n}\,|\,n\in\mathbf{N}\right\}=\varepsilon,$$

故 $y\notin B_d(x,\varepsilon)$，从而 $B(x,\varepsilon)\neq B_d(x,\varepsilon)$.

(2)　我们证明上面所取的 y 不是 $B(x,\varepsilon)$的内点. $\forall\,\delta>0$，取 $z_n=y_n+\delta/2$，$(n\in\mathbf{N})$，则

$$z=\langle z_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in B(y,\delta)$$

但　$\exists\, i\in\mathbf{N}$ s.t. $\frac{1}{k+i}<\delta/2$，于是

$$\begin{aligned}|x_i-z_i|&=x_i-(y_i+\delta/2)|\\&=\varepsilon+\delta/2-\frac{1}{k+i}|>\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $z\notin B(x,\varepsilon)$，这就表明定义 τ_u 时的 y 的邻域基的任一成员 $B(y,\delta)$都不能含于 $B(x,\varepsilon)$，所以$y\notin\langle B(x,\varepsilon)\rangle^{\circ}$，从而 $B(x,\varepsilon)$不是开集.

(3)　若 $y\in B_d(x,\varepsilon)$，则

$$\sigma=(\varepsilon-d(x,y))/2>0,$$

令

$$\begin{aligned}\delta&=\varepsilon-\sigma=\varepsilon-((\varepsilon-d(x,y))/2)\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}d(x,y)<\varepsilon,\end{aligned}$$

易见 $\delta>0$. 下面证明 $y\in B(x,\delta)\subset\bigcup\limits_{\delta'<\varepsilon}B(x,\delta')$.

事实上, $\forall\ n\in\mathbf{N}$

$$|x_n-y_n|\leqslant d(x,y)=\varepsilon-2\sigma=\delta-\sigma<\delta,$$

所以 $y\in B(x,\delta)\subset\bigcup\limits_{\delta'<\varepsilon}B(x,\delta')$, 即得

$$B_d(x,\varepsilon)\subset\bigcup_{\delta<\varepsilon}B(x,\delta).$$

另一方面,若 $\exists\ \delta<\varepsilon$ s.t. $y\in B(x,\delta)$, 则 $\forall\ n\in\mathbf{N}$,

$$|x_n-y_n|<\delta.$$

于是 $d(x,y)=\sup\{|x_n-y_n|\ |n\in\mathbf{N}\}\leqslant\delta<\varepsilon$. 所以 $y\in B_d(x,\varepsilon)$. 从而

$$\bigcup_{\delta<\varepsilon}B(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon).$$

故有

$$B_d(x,\varepsilon)=\bigcup_{\delta<\varepsilon}B(x,\delta).$$ □

注 $B(x,\varepsilon)$正是定义 τ_u 时 x 的邻域基的成员,故(2)表明它仅仅是 x 的"邻域",而不是开邻域.(1)表明这个邻域与 d(d 诱导的拓扑恰好是 τ_u)的球形邻域是不相等的.

C 练习题

6.3.1 设 X 是完全正则的 T_1 空间,且 X 可数,证明在 $\langle\mathscr{F}(X,E^1),\tau_p\rangle$ 中, $\forall\ f\in\mathscr{F}(X,E^1)$, 总存在 $\mathscr{C}(X,E^1)$中的序列 $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛于 f.

6.3.2 设 $f_n:[0,1]\to E^1$, $x\mapsto x^n(n\in\mathbf{N})$, 证明函数序列在 $\langle\mathscr{F}([0,1],E^1),\tau_p\rangle$ 中收敛,而在 $\langle\mathscr{F}([0,1],E^1),\tau_u\rangle$ 中不收敛.

6.3.3 设 $f_n:E^1\to E^1$定义为

$$f_n(x)=\frac{1}{n^3(x-\frac{1}{n})^2+1}\quad(n\in\mathbf{N}),$$

$$f_0:E^1\to E^1,\ x\mapsto 0.$$

证明:

(1) $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在 $\langle\mathscr{F}(E^1,E^1),\tau_p\rangle$中收敛于 f_0.

(2) $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在 $\langle\mathscr{F}(E^1,E^1),\tau_u\rangle$中不收敛.

6.3.4 设 $A=\{\langle a_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{R}^\omega|\exists\ i\in\mathbf{N}$ s.t. $\forall\ n\geqslant i,\ a_n=0\}$, 在 $\mathbf{R}^\omega$ 上取一致收敛的拓扑 τ_u, 试求 $\mathrm{Cl}_{\tau_u}A$.

6.3.5 设 X 为非空集合, $\langle Y,\rho\rangle$为度量空间, Z 为任一拓扑空间, $p_x:Y^X\to Y$ 为第 x 个投影,若在 $Y^X=\mathscr{F}(X,Y)$上赋予一致收敛的拓扑 τ_u,证明

$f:Z\to Y^Z$ 连续$\Leftrightarrow\mathscr{F}(Z,Y)$中的函数族 $F=\{p_x\circ f\}_{x\in X}$等度连续.

6.3.6 设 X 为拓扑空间, $\langle Y,\rho\rangle$为度量空间, $f_n:X\to Y(n\in\mathbf{N})$连续, $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$为 X 中收敛于 x 的序列. 证明:如果$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$一致收敛于 f, 则$\langle f_n(x_n)\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在 Y 中收敛于 $f(x)$.

6.3.7 设 X 为非空集合,如果函数族 $F\subset\mathscr{F}(X,E^n)$满足条件:

$$\forall\ x\in X,\ F(x)=\{f(x)|f\in F\}都是有界的,$$

则称 F 是点态有界的；如果$\exists\ M>0$ s.t. $\forall\ x\in X$ 以及$\forall\ f\in F$ 都有$\|f(x)\|<M$. 则称 F 是一致有界的，证明：

(1) 如果 X 是紧致拓扑空间，$F\subset\mathscr{F}(X,E^n)$等度连续，且点态有界，则 F 一致有界.

(2) (广义形式的 Arzalà 定理) 设 X 为紧致空间，$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$为 $\mathscr{F}(X,E^n)$中的序列，如果 $F=\{f_n\mid n\in\mathbf{N}\}$等度连续且点态有界，则$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$必有在 X 上一致收敛的子序列.

6.3.8 设 X 为正则空间，Y 为拓扑空间，$\mathscr{S}$ 是 Y 的一个拓扑子基，那么 $\mathscr{C}(X,Y)$的子集族

$$\Gamma=\{S(K,U)\mid K\subset X\ \text{紧致},U\in\mathscr{S}\}$$

是$\langle\mathscr{C}(X,Y),\tau_C\rangle$的一个子基. 其中

$$S(K,U)=\{f\in\mathscr{C}(X,Y)\mid f(K)\subset U\}.$$

部分练习题解答

1.1.9 (1) ρ_1 与 ρ 等价．事实上，由于

$$f: \mathbf{R} \to (-1,1),\ x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

$$f^{-1}: (-1,1) \to \mathbf{R},\ x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|},$$

都是连续的单调增函数，故 $\mathbf{R}$ 的 ρ_1 开球与开区间等价．

(2) ρ_2 与 ρ 不等价，而且它们诱导的拓扑不可比较．这是因为 $(-1,1)$ 是 $\mathbf{R}$ 的 ρ-开集却不是 ρ_2-开集，又任一以 0 为中心的 ρ_2-开球却不是 ρ 开集．

1.2.10 设 $x \in \overline{A} - \overline{B}$，$\forall U \in \mathscr{N}(x)$，首先由于 $x \notin \overline{B}$，$\exists V \in \mathscr{N}(x) \cap \tau$ s.t. $V \subset \mathscr{C}\overline{B}$，又由 $U \cap V \in \mathscr{N}(x)$，$x \in \overline{A}$，有 $U \cap V \cap A \neq \varnothing$．于是

$$U \cap (A - \overline{B}) \supset U \cap A \cap \mathscr{C}\overline{B} \supset U \cap A \cap V \neq \varnothing.$$

故 $x \in \overline{A - \overline{B}}$. 从而 $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - \overline{B}} \subset \overline{A - B}$.

例 $X = E^1$，$A = (0,2)$，$B = (0,1] \cap \mathbf{Q}$，则

$$\overline{A} - \overline{B} = (1,2], \quad \overline{A - \overline{B}} = [1,2], \quad \overline{A - B} = [0,2].$$

1.3.4 (1) 令 $A = \{\langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}} \in C \mid \forall i,\ x_i \in \mathbf{Q}\}$，则 A 可数，设 $\xi = \langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}} \in C$，$\forall \varepsilon > 0$，选取 $a_i \in \left(x_i - \frac{\varepsilon}{i+1},\ x_i + \frac{\varepsilon}{i+1}\right) \cap \mathbf{Q}$，$i = 1,2,\cdots$，则 $\langle a_i \rangle_{i \in \mathbf{N}}$ 与 $\langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}}$ 有相同的极限，故 $a \overset{\text{def}}{=\!=} \langle a_i \rangle_{i \in \mathbf{N}} \in A$，且 $\rho(\xi, a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$，故 A 稠密．

(2) 设 $A = \{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 是 B 的任一可数子集，其中 $\xi_n = \langle a_i^n \rangle_{i \in \mathbf{N}}$，再令 $\xi = \langle x_i \rangle_{i \in \mathbf{N}}$，其中

$$x_i = \begin{cases} 2 & \text{若 } |a_i^i| \leqslant 1, \\ 0 & \text{若 } |a_i^i| > 1. \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots$$

则 $\xi \in B$ 且 $\forall \xi_n \in A$，$\rho(\xi, \xi_n) \geqslant 1$，故 A 不稠密．

1.6.14 "$\Rightarrow$" 令 $C = Y - (f(X - F))$ 即合要求．

"$\Leftarrow$" 设 G 开于 X，令 $F = X - G$，$B = Y - f(G)$，则 $F \supset f^{-1}(B)$，于是存在 Y 的闭集 C 使 $B \subset C$，且 $f^{-1}(C) \subset F$，即得 $Y - C \subset f(G)$ 且 $f^{-1}(C) \cap G = \varnothing$，所以 $C \cap f(G) = \varnothing$，从而 $f(G) = Y - C$ 开于 Y.

1.6.20 因 $[0, \frac{1}{4})$ 开于 $[0,1)$，而 $f([0, \frac{1}{4}))$ 不是 S^1 的开集，故 f 不是同胚（注．不少初学者误认为 f 是同胚）.

1.6.21　比较下表中$\langle \mathbf{R},\tau_i\rangle$所具有的性质即得．

$\langle \mathbf{R},\tau_i\rangle$ 性质	1	2	3	4	5	6	7	8
第一可数	√	√	√	×	×	√	√	√
第二可数	√	×	√	×	×	×	×	×
可　分	√	√	√	×	√	√	×	×
Lindelöf	√	√	√	√	√	×	√	×
单点集都是闭集	√	√	×	√	√	×	×	√

1.7.7(1)　$[0,\frac{1}{2})\times[0,\frac{1}{2})\in\tau-\tau^*$，因为$(0,\frac{1}{2})\times\{0\}$中的点在$\tau^*$之下不是$[0,\frac{1}{2})\times[0,\frac{1}{2})$的内点，又$\{0\}\times[0,\frac{1}{2})\in\tau^*-\tau$，故$\tau$与$\tau^*$不可比较．

(2)　τ的每个子基元都属于τ'，而$\{0\}\times[0,\frac{1}{2})\in\tau'-\tau$，所以$\tau\subsetneqq\tau'$.

(3)　τ^*的任一子基元都属于τ'，而$\{\frac{1}{2}\}\times[0,1)\in\tau'-\tau^*$，所以$\tau^*\subsetneqq\tau'$.

2.1.10　若有$a_1<a_2<a_3$使$f^{-1}(a_i)$都是非空可数集，则由B2.1.7知$A=E^n-f^{-1}(\{a_1,a_2,a_3\})$连通，但据介值定理，$\{f(A)\cap(-\infty,a_2),f(A)\cap(a_2,+\infty)\}$是$f(A)$的分解，导致矛盾．将$E^n$换成$S^n$类似．

2.1.13　由B2.1.10(2)．A在G中既开又闭，所以$\overline{\mathscr{C}A}=\mathscr{C}A$，$\overline{A}\cap G=A$. 从而

$$\mathrm{Bd}_X A=\overline{A}\cap\overline{\mathscr{C}A}=\overline{A}\cap\mathscr{C}G\subset\overline{G}\cap\overline{\mathscr{C}G}=\mathrm{Bd}_X G.$$

当G有无限个连通分支时，结论不真，例如$X=\mathbf{Q}$，$G=(0,1)\cap\mathbf{Q}$，$A=\{\frac{1}{2}\}$.

2.3.4　令$G_1=B_{E^2}\left(\langle 0,1\rangle,\frac{1}{2}\right)\cap C$，$G_2=B_{E^2}\left(\langle 0,1\rangle,\frac{1}{2}\right)\cap D$，则$\{0\}\times(\frac{1}{2},1]$是$G_1$的连通分支但不是$C$的开集，$\{\langle 0,1\rangle\}$是$G_2$的连通分支但不是$D$的开集．

3.1.12　用归纳法构造渐缩序列$\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathscr{F}$以及闭区间套$\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$使$\forall n$，$F_n\subset I_n$，$\delta(I_n)\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$：

首先$\exists F_1\in\mathscr{F}$ s.t. $\delta(F_1)<\frac{1}{3}$，于是$\exists I_1$ s.t. $F_2\subset I_1$且$\delta(I_1)<\frac{2}{3}$. 现假定$k\leqslant n-1$时，$\{F_k\}$，$\{I_k\}$都已作出，则$\exists G\in\mathscr{F}$ s.t. $\delta(G)<\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，令$F_n=G\cap F_{n-1}$，则$I_{n-1}$的左边$\frac{2}{3}$或右边$\frac{2}{3}$必有一个包含$F_n$，取作$I_n$，即合要求．由区间套定理得单点集$\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$. 则可验证$x_0$符合要求．

3.2.1　[法一]　设$\mathscr{F}=\varphi(\xi)$，易证$\mathscr{F}\cup\mathscr{A}$具有有限交性质，可生成滤子$\mathscr{G}$，故存在$\xi$的子网$\eta$使$\mathscr{G}=\varphi(\eta)$，则$\eta$合所求．

[法二]　令$\Delta=\{\langle d,A\rangle\mid d\in D,\ A\in\mathscr{A}$且$x_d\in A\}$，定义$\langle d_1,A_1\rangle\prec\langle d_2,A_2\rangle\Leftrightarrow d_1<d_2$且$A_1\supset A_2$，再令$k:\Delta\to D$，$\langle d,A\rangle\mapsto d$，则$\eta=\xi\circ k$合所求．

3.2.6　对于拓扑空间X的任一网ξ，都有

(1) $\mathrm{Adh}\xi=\bigcup\{\mathrm{Lim}\eta \mid \eta\in \mathrm{CN}(X)$ 且存在 ξ 的万有子网 $\eta^*\sim\eta\}$,

(2) $\mathrm{Lim}\xi=\bigcap\{\mathrm{Adh}\eta \mid \eta\in \mathrm{CN}(X)$ 且存在 ξ 的万有子网 $\eta^*\sim\eta\}$.

[法一] 简接证明,利用网与滤子的相互关系,由 C3.1.11 转移过来.

[法二] 直接证明.(1) 只须证左端$\subset$右端.

设 $x\in \mathrm{Adh}\xi$, 则存在 ξ 的子网 η_1 s.t. $x\in \mathrm{Lim}\,\eta_1$. η_1 又存在万有子网 η^*, 取 $\eta\in \mathrm{CN}(X)$ s.t. $\eta\sim\eta^*$ 就有 $x\in\mathrm{Lim}\eta$.

(2) 只须证右端$\subset$左端. 若 $x\notin \mathrm{Lim}\xi$, 则$\exists\ U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. ξ 常在 $\mathscr{C}U$. 于是 $\Delta=\{d\in D \mid \xi(d)\in\mathscr{C}U\}$ 是 D 的共尾子集,故 $\xi|_\Delta$ 是 ξ 的子网,显然 $x\notin \mathrm{Adh}(\xi|_\Delta)$, $\xi|_\Delta$ 的万有子网 η^* 也是 ξ 的万有子网且 $x\notin \mathrm{Lim}\eta^*=\mathrm{Adh}\eta^*$, 选取 $\eta\in\mathrm{CN}(X)$ s.t. $\eta\sim\eta^*$, 当然有 $x\notin\mathrm{Adh}\eta$.

3.3.2 [法一] 用网.

$\forall\ \langle x,y\rangle\in X\times Y$, 设 $\xi=\langle x_d,y_d\rangle_{d\in D}$为 $X\times Y$ 的网,且$\langle x,y\rangle\in\mathrm{Lim}\xi$. 令 $\eta=\langle x_d,\varphi(x_d,y_d)\rangle_{d\in D}$, 则 η 为 $X\times Y$ 的网,且

$$g\circ\xi(d)=g(x_d,y_d)=f(x_d,\varphi(x_d,y_d))=f\circ\eta(d).$$

由于$\langle x,\varphi(x,y)\rangle\in\mathrm{Lim}\eta$, 故

$$g(x,y)=f(x,\varphi(x,y))\in\mathrm{Lim}f\circ\eta=\mathrm{Lim}g\circ\xi,$$

所以 g 连续.

[法二] 用滤子. 令

$$h: X\times Y\to X\times Y,\ \langle x,y\rangle\mapsto\langle x,\varphi(x,y)\rangle,$$

则 $g=f\circ h$. $\forall\ \langle x,y\rangle\in X\times Y$, 设 $\mathscr{F}$ 为 $X\times Y$ 的收敛于$\langle x,y\rangle$的滤子. 则 $x\in\mathrm{Lim}p_1^*(\mathscr{F})$, $\varphi(x,y)\in\mathrm{Lim}\varphi^*(\mathscr{F})$. 因 $p_1h=p_1$, $p_2h=\varphi$, 故$\langle x,\varphi(x,y)\rangle\in\mathrm{Lim}h^*(\mathscr{F})$.

$$\begin{aligned}g(x,y)&=f\circ h(x,y)=f(x,\varphi(x,y))\\&\in\mathrm{Lim}f^*h^*(\mathscr{F})=\mathrm{Lim}(fh)^*(\mathscr{F})=\mathrm{Lim}g^*(\mathscr{F}).\end{aligned}$$

从而 g 连续.

4.1.6 [法一] 证 $\mathscr{C}f$ 是开集,注意到$\langle x,y\rangle\in\mathscr{C}f\Leftrightarrow y\neq f(x)$, 仿照 B4.1.5(1).

[法二] 利用网. 设 $\xi=\langle x_d,f(x_d)\rangle_{d\in D}$是 f 中的网且$\langle x,y\rangle\in\mathrm{Lim}\xi$. 则 $x\in\mathrm{Lim}\langle x_d\rangle_{d\in D}$, $y\in\mathrm{Lim}\langle f(x_d)\rangle_{d\in D}$, 由 f 的连续性与极限的唯一性得 $y=f(x)$, 即$\langle x,y\rangle\in f$.

[法三] 利用滤子. 设 $\mathscr{F}$ 是 $X\times Y$ 的滤子,$f\in\mathscr{F}$ 且$\langle x,y\rangle\in\mathrm{Lim}\mathscr{F}$. 则

$$x\in\mathrm{Lim}p_1^*(\mathscr{F}),\quad y\in\mathrm{Lim}p_2^*(\mathscr{F}).$$

又容易证明 $p_2^*(\mathscr{F})=f^*(p_1^*(\mathscr{F}))$, 于是由 f 的连续性与极限的唯一性得 $y=f(x)$.

4.1.9 当 $i\geqslant 3$ 时,设 $X=\mathbf{R}$, τ_1 为通常的拓扑,τ_2 为 B4.1.9 中的拓扑,则 $\tau_1\subset\tau_2$, $\langle X,\tau_1\rangle$既正则又正规,而$\langle X,\tau_2\rangle$不是正则也不是正规的.

4.1.4 若$\langle\mathbf{R},\tau^*\rangle$正则,则对于 0 与不含 0 的闭集 A,$\exists\ G_1,G_2$ 开于 E^1,$B_1,B_2\subset A$ s.t.

$$0\in G_1-B_1,\quad A\subset G_2-B_2.$$

$$(G_1\cap G_2)-(B_1\cup B_2)=(G_1-B_1)\cap(G_2-B_2)=\varnothing.$$

现在如果 $G_1\cap G_2\neq\varnothing$,则由 $G_1\cap G_2$ 不可数,$B_1\cup B_2$ 可数而得矛盾,如果 $G_1\cap G_2=\varnothing$, 则 $G_1\cap A\subset G_1\cap G_2=\varnothing$, 但 $G_1\in\mathscr{N}_{E^1}(0)$, 且 0 在 E^1 中是 A 的聚点,又得矛盾. 所以$\langle\mathbf{R},\tau^*\rangle$不是正则的.

4.2.2 “⇒” $\forall f\in\mathscr{C}(X,[0,1])$，$Z_f=f^{-}((0,1])$开于 X，设 G 开于 X 且 $x\in G$，则存在 $f\in\mathscr{C}(X,[0,1])$使 $f(x)=0$，$f(\mathscr{C}G)\subset\{1\}$. 令 $g:X\to[0,1]$，$y\mapsto 1-f(y)$，则 $x\in Z_g\subset G$，故$\{Z_f\mid f\in\mathscr{C}(X,[0,1])\}$是$\langle X,\tau\rangle$的一个基．

“⇐” 设 $x\in X$，F 为 X 的不含 x 的闭集，则$\exists\ f\in\mathscr{C}(X,[0,1])$ s.t. $x\in Z_f\subset\mathscr{C}f$. 令

$$g:X\to[0,1],\ y\mapsto 1-\frac{f(y)}{f(x)}.$$

则 g 连续且 $g(x)-0$，$g(F)\subset\{1\}$. 所以 X 完全正则．

4.2.6 设 A,B 为$\langle X,\rho\rangle$的任意两个不相交的非空闭集．令

$$f:X\to[0,1],\ x\mapsto f(x)=\frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)},$$

即知$\langle X,\rho\rangle$正规．

4.3.4 因 $L=\mathbf{R}\times\{0\}$是切盘拓扑空间的离散的闭子空间，故 L 不是可数紧的，从而$\langle X,\tau\rangle$本身也不是可数紧的．

4.3.11 设$\langle x_n,y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$为 $X\times Y$ 的任一序列，由假设条件可知$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$有收敛的子序列$\langle x_{n_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$，极限为 x，而$\langle y_{n_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$有接触点 y，则$\langle x,y\rangle$是$\langle x_{n_i},y_{n_i}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$的接触点，也是$\langle x_n,y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的接触点，故 $X\times Y$ 是可数紧的．

4.5.2 (1) 不是第一可数的，(2) Lindelöf 性与第二可数性不等价(B1.5.6)，(3) 易见 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 是切盘拓扑空间的可数的稠密子集，故可分．但它的子空间 $\mathbf{R}\times\{0\}$却不是第二可数的，从而$\langle X,\tau\rangle$本身也不是第二可数的．所以(1)，(2)，(3)都不可度量化．

4.5.7 由[1]例 5.2.1 或本书 B5.2.9 知切盘拓扑空间是完全正则的 T_1 的，故 S 也是完全正则的 T_1 的．又

$$\mathscr{B}=\{B(\langle x_1,x_2\rangle,\varepsilon)\mid\langle x_1,x_2\rangle\in P\cap(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}),\varepsilon\in(0,x_2)\cap\mathbf{Q}\}$$
$$\cup\{B(\langle x_1,r\rangle,r)\cup\{\langle x_1,0\rangle\}\mid x_1\in\mathbf{Q},r\in(0,+\infty)\cap\mathbf{Q}\}$$

是 S 的一个可数基，故由 Urysohn 度量化定理即知 S 可度量化．

4.5.9 显然 f 连续，故 $f(X)$紧致，从而为闭集．如果$\exists\ x\notin f(X)$，则$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $B(x,\varepsilon)\cap f(X)=\varnothing$，令 $x_1=x$，$x_2=f(x_1),\cdots,x_{n+1}=f(x_n),\cdots$，则$\forall\ i<j$

$$\rho(x_i,x_j)=\rho(f(x_{i-1}),f(x_{j-1}))=\rho(x_{i-1},x_{j-1})=\cdots$$
$$=\rho(x_1,f(x_{j-i}))\geqslant\varepsilon.$$

于是$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$无收敛的子序列，与 X 紧致矛盾．所以 $f(X)=X$.

现设 $X=\mathbf{N}$ 是离散的，$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$x\mapsto x+1$，显然 f 是保距的，但不是满的．

4.5.10 $\forall\ x\in X$ 以及收敛于 x 的序列$\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$，令 $A=\{x\}\cup\{x_n\mid n\in\mathbf{N}\}$，则 A 紧致．由于 $f|_A$ 连续，故$\langle f(x_n)\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在 Y 中收敛于 $f(x)$，所以 f 在 X 上连续．

5.2.6 $\forall\ x\in G\ \exists\ U\in\mathscr{N}_G(x)$ s.t. U 紧致，因 X 是 Hausdorff 的，故 U 闭于 X. 又$\exists\ V\in\tau$ s.t. $\mathrm{Int}_G U=V\cap G$ 且 $V\subset X=\overline{G}$，故由 B1.2.16 得 $\overline{V}=\overline{V\cap G}$. 于是 $x\in\mathrm{Int}_G U\subset V\subset\overline{V\cap G}\subset\overline{U}=U\subset G$. 从而 $G\in\tau$.

5.2.9 若 H 局部紧，则$\forall\ x\in H$，$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $\overline{B_{\rho_H}(x,\varepsilon)}$紧致。$\forall\ n\in\mathbf{N}$ 令

$$x^n=\langle x_1,\cdots,x_{n-1},x_n+\varepsilon,x_{n+1},\cdots\rangle$$

则 $x^n\in\overline{B_{\rho_H}(x,\varepsilon)}$，且当 $i\neq j$ 时，$\rho_H(x^i,x^j)=\sqrt{2}\varepsilon$，故$\langle x^n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$无收敛子序列，与$\overline{B_{\rho_H}(x,\varepsilon)}$的

紧致性矛盾．

6.2.1　考虑 E^n 的一点紧化 $E^n\cup\{\infty\}$，令 $\varphi: X\to E^n\cup\{\infty\}$ 为

$$\varphi(x)=\begin{cases}h(x), & x\notin S^{n-1},\\ \infty, & x\in S^{n-1}.\end{cases}$$

其中 $h: X-S^{n-1}\to E^n$ 为同胚 $\left(\text{比如 } h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\right)$．现在 $r=r(\varphi)$，可以验证 φ 为商映射，从而完成证明．

对于 φ 的连续性，只需验证 $\forall\, x\in S^{n-1}$，φ 在 x 处连续．对于 ∞ 的邻域基中任一成员 $V=(E^n\cup\{\infty\})-F$，其中 F 为 E^n 的紧致闭集．取 $U=X-h^{-1}(F)$，由于 $h^{-1}(F)$ 紧致，故在 X 中为闭，即 $U\in\mathscr{N}_X(x)$，且易见 $\varphi(U)\subset V$，所以 φ 连续．

再证 $\forall\, G\subset E^n\cup\{\infty\}$，若 $\varphi^{-1}(G)$ 开于 X，则 G 开于 $E^n\cup\{\infty\}$. 事实上，若 $\infty\notin G$，则 $\varphi^{-1}(G)=h^{-1}(G)$ 结论成立．若 $\infty\in G$，则 $S^{n-1}\subset\varphi^{-1}(G)$，$X-\varphi^{-1}(G)\subset X-S^{n-1}$．$X-\varphi^{-1}(G)$ 是 X 的闭集，故紧致，从而是 $X-S^{n-1}$ 的紧致闭集．而 $\varphi(X-\varphi^{-1}(G))=h(X-\varphi^{-1}(G))$ 是 E^n 的紧致闭集，所以 $G=(E^n\cup\{\infty\})-\varphi(X-\varphi^{-1}(G))$ 是 $E^n\cup\{\infty\}$ 的开集．

6.2.6　令 $f: [0,1]\times[0,1]\to T$ 为 $\forall\, \langle x,y\rangle\in[0,1]\times[0,1]$

$$f(x,y)=\langle(2+\cos 2\pi x)\cos 2\pi y,\ (2+\cos 2\pi x)\sin 2\pi y,\ \sin 2\pi x\rangle,$$

则不难检验 $r=r(f)$，f 为连续满射，由 $[0,1]\times[0,1]$ 紧致，T 是 Hausdorff 的，故得 X/r 与 T 同胚．

6.2.11　令 $f: E^2\to E^1$，$\langle x,y\rangle\mapsto x+y^2$，则 f 为连续满射，且 $r=r(f)$，不难证明 f 是商映射，从而 E^2/r 与 E^1 同胚．

注　从直觉上，f 将抛物线 $x=-y^2+c$ 上的所有点都粘合在一起，用抛物线的顶点作代表正好构成 x 轴．

6.2.13　(3)　设 $x^*=q(x)$，$x\in\mathbf{R}\times\{0\}$，$U$ 为 x^* 在 E^2/r 中的开邻域，使 $\mathrm{Cl}_{E^2/r}U$ 紧致．$\forall\, y\in\mathbf{R}\times\{0\}\subset q^{-1}(U)$，令 $\varepsilon_y=\dfrac{1}{2}\rho(y,\mathscr{C}q^{-1}(U))>0$，再令 $G=\bigcup\{B(y,\varepsilon_y)\mid y\in\mathbf{R}\times\{0\}\}$，则 G 开于 E^2 且 $\mathbf{R}\times\{0\}\subset G$. 由 $\forall\, y=\langle y_1,0\rangle\in\mathbf{R}\times\{0\}$，$\langle y_1,\dfrac{3}{2}\varepsilon_y\rangle\in q^{-1}(U)-G\subset q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^2/r}U)-G$，知 $q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^2/r}U)-G$ 是 E^2 的无界闭集．从而存在由 E^2 中与 $\mathbf{R}\times\{0\}$ 不相交的开集组成的 $q^{-1}(\mathrm{Cl}_{E^2/r}U)-G$ 的覆盖 $\mathscr{G}$，它没有有限子覆盖，则

$$\mathscr{G}^*=\{G^*\subset E^2/r\mid G^*=q(V),\ V\in\mathscr{G}\cup\{G\}\}$$

是 $\mathrm{Cl}_{E^2/r}U$ 在 E^2/r 中的一个开覆盖，它无有限子覆盖，这与 $\mathrm{Cl}_{E^2/r}U$ 的紧致性矛盾．所以 E^2/r 不是局部紧的．

(4)　设 $x^*=q(x)$，$x\in\mathbf{R}\times\{0\}$，$x^*$ 有可数的开邻域基 $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. $\forall\, n\in\mathbf{N}$ 令 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{2}\rho(n,\mathscr{C}U_n)$，将

$$\langle 1,\varepsilon_1\rangle,\langle 2,\varepsilon_2\rangle,\cdots,\langle n,\varepsilon_n\rangle,\cdots,$$
$$\langle 1,-\varepsilon_1\rangle,\ \langle 2,-\varepsilon_2\rangle,\cdots,\langle n,-\varepsilon_n\rangle,\cdots$$

两组点分别顺次用折线相连．令 G 为 $(-\infty,1)\times(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$ 与上述两折线间所夹区域（不含折线）之并，则 $q(G)$ 为 x^* 的开邻域，但 $\forall\, n$，$U_n\not\subset q(G)$，引起矛盾，所以 E^2/r 不是第一可数

的．

6.3.2　令 $f:[0,1]\to E^1$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

容易证明在 τ_p 之下，$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛于 f，由于$\langle\mathscr{F}([0,1],E^1),\tau_p\rangle$是 Hausdorff 的，故$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$的极限是唯一的．如果$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在 τ_u 之下收敛，其极限也是在 τ_p 之下的极限，从而只能是 f，然而 $f\notin\mathscr{C}([0,1],E^1)$，这与 $\mathscr{C}([0,1],E^1)$在 τ_u 之下是闭集相矛盾，所以$\langle f_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$在 τ_u 之下不收敛．

6.3.8　设 $S(K,U)$为 τ_c 的任一子基元，$f\in S(K,U)$，其中 $U=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，$U_\lambda$ 是 $\mathscr{S}'$ 的有限个成员之交．由于 X 正则，K 紧致，且 $K\subset f^{-1}(U)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(U_\lambda)$，故存在 K 在 X 中的开覆盖 $\{G_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$及$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\subset\Lambda$，使$\forall\ i$，$\overline{G}_i\subset f^{-1}(U_{\lambda_i})$，于是 $f(\overline{G}_i\cap K)\subset U_{\lambda_i}$.

假定 $U_{\lambda_i}=\bigcap\limits_{j=1}^{m(i)}V_j^i$，其中 $V_j^i\in\mathscr{S}'$. 由于 $\overline{G}_i\cap K$ 紧致，故 $S(\overline{G}_i\cap K,V_j^i)\in\Gamma$. 现在

$$f\in\bigcap_{i=1}^{n}S(\overline{G}_i\cap K,U_{\lambda_i})=\bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m(i)}S(\overline{G}_i\cap K,V_j^i)\subset S(K,U),$$

且 $\Gamma\subset\tau_c$，所以 Γ 是 τ_c 的子基．

附录　有关集论知识提要

I　集合代数

集，族，类，系等都是集合的同义词．集合的元素也叫元，成员或“点”．本书采用下述符号：

$A\subset B$ 表示 A 为 B 的子集，A 可以等于 B.

$A-B$ 或 $\mathscr{C}_A B$ 表示 B 在 A 中的(相对)补集，即 $A-B=\mathscr{C}_A B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$．当在某个固定集合 A 中讨论问题时，B 为 A 的子集，B 在 A 中的补集就简称 B 的补集并记作 $\mathscr{C}B$.

$\mathscr{P}(A)$ 表示由 A 的所有子集为元素的集合族，叫做 A 的幂集．

$\mathbf{R}=\{x\mid x$ 为实数$\}$，　　$\mathbf{Q}=\{x\mid x$ 为有理数$\}$，

$\mathbf{N}=\{n\mid n$ 为自然数$\}$，　　$\mathbf{Z}=\{x\mid x$ 为整数$\}$.

其它有关集合的代数运算的定义与符号都是标准的．

下列一些定律和性质经常要用到：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$\bigcup\mathscr{A}=(\bigcup\mathscr{A}_1)\cup(\bigcup\mathscr{A}_2)$，

$\bigcap\mathscr{A}=(\bigcap\mathscr{A}_1)\cap(\bigcap\mathscr{A}_2)$，

其中 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2$，$\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ 都是集合族．

(3) 分配律　$C\cap(\bigcup\mathscr{A})=\bigcup\{C\cap A\mid A\in\mathscr{A}\}$，

$C\cup(\bigcap\mathscr{A})=\bigcap\{C\cup A\mid A\in\mathscr{A}\}$.

(4) De-Morgen 定律

$C-(\bigcup\mathscr{A})=\bigcap\{C-A\mid A\in\mathscr{A}\}$，

$C-(\bigcap\mathscr{A})=\bigcup\{C-A\mid A\in\mathscr{A}\}$.

(5) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C=(A-C)\cap B$.

(6) 下述诸关系式彼此等价：

(i) $A\subset B$，　　(ii) $A\cap B=A$，

(iii) $A\cup B=B$，　　(iv) $\mathscr{C}B\subset\mathscr{C}A$，

(v) $A\cap\mathscr{C}B=\varnothing$，　　(vi) $(\mathscr{C}A)\cup B=X$，

其中，X 为某固定集合，(iv)，(v)，(vi)中 A，B 均为 X 的子集．

(7) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$，

(8) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$，

$C\times(A-B)=(C\times A)-(C\times B)$.

(9) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$，

$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$.

(10) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$,

$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$.

Ⅱ 关系与映射

笛卡儿积 $X\times Y$ 的子集 $r\subset X\times Y$ 叫做 X 到 Y 的一个关系，$\langle x,y\rangle\in r$ 就说 x 与 y 是 r-相关的，可记作 xry.

$$\mathrm{Dom}(r)=\{x\in X\,|\,\exists\ y\in Y\ \text{s.t.}\ \langle x,y\rangle\in r\}$$

叫做 r 的定义域，设 $A\subset X$，记

$$r(A)=\{y\in Y\,|\,\exists\ x\in A\ \text{s.t.}\ \langle x,y\rangle\in r\}.$$

$r(X)$ 叫做 r 的值域．当 $A=\{x\}$ 时，也记 $r(\{x\})=r[x]$.

当 $Y=X$ 时，就说 r 是 X 中的关系，如果此时 $\mathrm{Dom}(r)=X$，就说 r 是 X 上的关系．

$$id_X=\{\langle x,x\rangle\,|\,x\in X\}$$

叫做 X 上的恒等关系，也叫 $X\times X$ 的对角线．

设 $r\subset X\times Y$，令 $r^{-1}=\{\langle y,x\rangle\in Y\times X\,|\,\langle x,y\rangle\in r\}$，称 r^{-1} 为 r 的逆关系．

设 $r\subset X\times Y$，$s\subset Y\times Z$，令

$$s\circ r=\{\langle x,z\rangle\in X\times Z\,|\,\exists\ y\in Y\ \text{s.t.}\ \langle x,y\rangle\in r\text{ 且}\langle y,z\rangle\in s\},$$

称 $s\circ r$ 为 r 与 s 的复合关系．

对于 X 中的关系 r，如果 $\forall\ x\in X$ 都有 xrx，则称 r 为自反的；如果 $\forall\ x,y\in X$，$xry\Rightarrow yrx$，则称 r 是对称的；如果 $\forall\ x,y,z\in X$，$(xry$ 且 $yrz)\Rightarrow xrz$ 则称 r 是传递的；如果 r 同时是自反的，对称的，传递的，则称 r 是 X 上的等价关系．

设 r 为 X 上的等价关系，若 xry，则称 x 与 y 是 r 等价的，$r[x]=\{y\in X\,|\,xry\}$ 叫做以 x 为代表的等价类，X 的子集族 $\{r[x]\,|\,x\in X\}$ 叫做 X 的 mod$r$ 商集合，记作 X/r.

定理Ⅱ.1 设 X,Y,Z,W 为集合，$r\subset X\times Y$，$s\subset Y\times Z$，$t\subset Z\times W$，则

(1) $(r^{-1})^{-1}=r$, (2) $r\circ id_X=id_Y\circ r=r$,

(3) $(s\circ r)^{-1}=r^{-1}\circ s^{-1}$, (4) $t\circ(s\circ r)=(t\circ s)\circ r$,

(5) $\forall\ A\subset X$，$(s\circ r)(A)=s(r(A))$.

定理Ⅱ.2 设 r 为 X 上的等价关系，则

(1) $\forall\ x\in X$，$x\in[x]$，从而 $[x]\neq\varnothing$.

(2) $\forall\ x,y\in X$，$[x]=[y]\Leftrightarrow xry$，　$[x]\cap[y]\neq\varnothing\Rightarrow[x]=[y]$.

其中 $[x]$，$[y]$ 是 $r[x]$，$r[y]$ 的简写．

设 f 为非空集 X 到非空集 Y 的关系，如果 $\forall\ x\in X$，集合 $f[x]=\{y\in Y\,|\,\langle x,y\rangle\in f\}$ 恰有一点，并将这一点记作 $f(x)$，我们称 f 为 X 到 Y 的映射，写作 $f:X\to Y$，叫 $f(x)$ 为 x 在 f 下的像或值．为明确表示 f 所确定的关系，常记为

$$f:X\to Y,\ x\mapsto f(x).$$

设 A 为 X 的子集，映射

$$i_A:A\to X,\ x\mapsto i_A(x)=x,$$

叫做包含映射，当 $A=X$ 时，$i_A=id_X$ 叫恒同映射．

若 $f:X\to Y$，$x\mapsto f(x)=y_0$，y_0 为 Y 中固定的点，则称 f 为常值映射．

$\xi: \mathbf{N} \to X,\ n \mapsto \xi(n) = x_n$，叫做 X 的序列，也记作 $\xi = \langle x_n \rangle_{n \in \mathbf{N}}$.

设 r 为 X 的等价关系，$q: X \to X/r,\ x \mapsto q(x) = r[x]$，称 q 为自然映射.

设 $f: X \to Y,\ A \subset X,\ B \subset Y$，则

$$f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

叫做 A 在 f 之下的像.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

叫做 B 在 f 之下的原像.

设 $f: X \to Y$ 如果$\forall\ x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) \neq f(x_2)$则称 f 为单射或说 f 是单一的；若 $f(X) = Y$，则说 f 是满射；若 f 既是单射又是满射，则称 f 是一一映射（注意，在有些著作中把单射叫做一一的，我们不这样称呼）.

如果 $f: X \to Y$ 是一一映射，则逆关系 f^{-1}也是映射，叫做 f 的逆映射. 并由$(f^{-1})^{-1} = f$ 知 f 也是 f^{-1}的逆映射，因此 f 与 f^{-1}是互逆的.

设 $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$，则复合关系 $g \circ f \subset X \times Z$ 是 X 到 Z 的映射. 称 $g \circ f: X \to Z$ 为 f 与 g 的复合映射.

如果 $f: X \to Y,\ A \subset X,\ g: A \to Y$ 且满足$\forall\ x \in A,\ g(x) = f(x)$ 则说 g 为 f 在 A 上的限制，记作 $g = f|_A: A \to Y$，也说 f 是 g 到 X 上的扩张. 易见 $g = f \circ i_A$.

定理 Ⅱ.3 设 $f: X \to Y,\ g: Y \to X, A \subset X, B \subset Y$. 则

(1) $A \subset f^{-1}f(A)$；当 f 为单射时，$A = f^{-1}f(A)$.

(2) $ff^{-1}(B) = B \cap f(X)$； 从而当 f 为满射时，$ff^{-1}(B) = B$.

(3) $f^{-1}(B) = \varnothing \Leftrightarrow B \cap f(X) = \varnothing$.

(4) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

(5) $f(A - f^{-1}(B)) = f(A) - B$.

(6) $(f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$.

(7) 若 $g \circ f = id_X$，则 f 为单射，g 为满射.

(8) f 与 g 为互逆映射$\Leftrightarrow g \circ f = id_X$ 且 $f \circ g = id_Y$.

设 Λ 为非空集，$\mathscr{A}$ 为集合的非空族，$f: \Lambda \to \mathscr{A}$ 为满射，$\forall\ \lambda \in \Lambda$ 可记 $A_\lambda = f(\lambda)$，叫做以 λ 为指标的集合，于是 $\mathscr{A} = f(\Lambda) = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，叫做以 Λ 为指标集的集合族，也记作 $\mathscr{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. 此时，我们记

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},$$

$$\bigcap \mathscr{A} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

当 $\Lambda = \mathbf{N}$ 时，也记作$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

定理 Ⅱ.4 设 $f: X \to Y,\ \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathscr{P}(X).\ \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \varnothing,\ A, B \subset X$，则

(1) $f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$. 称 f 是保并的.

(2) $f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$，当 f 为单射时等号成立.

(3) $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$，当 f 为单射时等号成立.

定理 Ⅱ.5 设 $f: X \to Y,\ \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathscr{P}(Y),\ \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \neq \varnothing,\ S, X \subset Y$，则

(1) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(S_\lambda)$,

(2) $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(S_\lambda)$,

(3) $f^{-1}(S-T)=f^{-1}(S)-f^{-1}(T)$，特别地

$$f^{-1}(\mathscr{C}_Y T) = \mathscr{C}_X f^{-1}(T).$$

称 f^{-1}是保并，保交，保补的.

$n(n>2)$个集合 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的笛卡儿积可归纳定义如下：先定义 n 元序组$\langle x_1, x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle\langle x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$，易得

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle = \langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle\Leftrightarrow\forall\ i,x_i = y_i.$$

定义

$$\prod_{i=1}^{n} X_n = \{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid \forall\ i,x_i \in X_i\}.$$

一般地，对任意的集族$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}(\Lambda\neq\varnothing)$，其笛卡儿积 X 定义为所有映射 $x:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 组成的集合

$$X = \{x \mid \forall\ \lambda\in\Lambda,\ x(\lambda)\in X_\lambda\}$$

记成 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$. 其中每个映射 x 也叫 X 的点，并记成 $x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}$，此处 $x_\lambda=x(\lambda)\in X_\lambda$ $(\forall\ \lambda)$. X_λ 叫做第 λ 个因子，或第 λ 个坐标集合，x_λ 叫做 x 的第 λ 个坐标，或第 λ 个投影.

由 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 到第 μ 个因子 X_μ 的映射

$$p_\mu: X\to x_\mu,\ x\mapsto p_\mu(x) = x_\mu.$$

叫做第 μ 个投影(映射)，显然 p_μ 是满射.

假定 X 为指标集，$\{Y_x\}_{x\in X}$中每个 $Y_x=Y$，则 $\prod_{x\in\Lambda}Y_x$就等于所有由 X 到 Y 的映射构成的集合. 可以记作 Y^X.

Ⅲ　可数集

如果$\exists\ n\in\mathbf{N}$ 及一一映射 $f:X\to\{1,2,\cdots,n\}$，则称 X 为 n 元集，空集以及任意的 $n(n\in\mathbf{N})$元集都叫有限集. 若 X 不是有限集就叫无限集.

如果 $X=\varnothing$或存在单射 $f:X\to\mathbf{N}$(等价地存在满射 $g:\mathbf{N}\to X$)，则称 X 为可数集.

可见，可数集的任何子集都是可数集.

若 $A\neq\varnothing$且可数，如果存在单射 $f:B\to A$ 或存在满射 $g:A\to B$，则 B 也可数.

定理Ⅲ.1　任一无限集 X 必存在可数无限子集；有限多个可数集的笛卡儿积是可数集；可数集的可数族之并集是可数集；整数集 $\mathbf{Z}$ 与有理数集 $\mathbf{Q}$ 都可数；可数集的全体有限子集构成的集族是可数的.

定理Ⅲ.2　实数集 $\mathbf{R}$ 以及 $\mathbf{R}$ 的任一非退化的区间都不可数；$\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ 不可数.

Ⅳ　集合的序

非空集 X 中的一个关系 r，如果满足条件：$\forall\ x,y\in X$，$(xry$ 且 $yrx)\Rightarrow x=y$，则称 r 是反对的. X 上一个自反的，反对称的，传递的关系叫做 X 上的一个偏序，通常用“$\leqslant$”表示. $\langle X,\leqslant\rangle$就叫偏序集. 用“$\geqslant$”表示$\leqslant$的逆关系. 如果对于 X 中的元 x,y，$x\leqslant y$ 与 $y\leqslant x$ 中总有一个成立，就说 x 与 y 可比较.

若已知$\langle X,\leqslant\rangle$是偏序集，可令$x<y\Leftrightarrow x\leqslant y$且$x\neq y$，得$X$中一个关系$<$，它是传递的，且$\forall x\in X$，$x\nless x$(即$x<x$不成立)，这个性质叫做反自反的．反过来，如果给定$X$中一个传递的，反自反的关系$<$，可定义$x\leqslant y\Leftrightarrow x<y$或$x=y$．就得到$X$上的偏序$\leqslant$．

在关系$\leqslant$与$<$之下，可将实数集$\mathbf{R}$中的习惯用语，比如大小，前后，最大，最小，极大极小，有界，无界，上界，下界，上确界，下确界等用到一般的偏序集$\langle X,\leqslant\rangle$上，定义也是一样的．

如果$x<y$，也说x是y的先行元，y是x的后继元．

如果$\langle X,\leqslant\rangle$的任一有下界的非空子集都有下确界等价地$X$的任一有上界的非空子集都有上界确，则说$\langle X,\leqslant\rangle$是序完备的．

如果$\langle X,\leqslant\rangle$的任意两个元都可比较，则说$\langle X,\leqslant\rangle$是全序的或说是线性序的；如果$\langle X,\leqslant\rangle$的每个非空子集都有最小元，就说$\langle X,\leqslant\rangle$是良序集．显然良序集是序完备的全序集，$\mathbf{N}$在通常的顺序下是良序的，良序集的非空子集是良序的．

设$\langle X_1,\leqslant_1\rangle$，$\langle X_2,\leqslant_2\rangle$为偏序集，在$X_1\times X_2$上定义：

$$\langle x_1,x_2\rangle\leqslant'\langle y_1,y_2\rangle\Leftrightarrow x_1\leqslant_1 y_1\text{ 且 }x_2\leqslant_2 y_2,$$

则$\leqslant'$是$X_1\times X_2$上的偏序，称之为$X_1\times X_2$上的积次序．如果$\langle X_1,\leqslant_1\rangle$与$\langle X_2,\leqslant_2\rangle$都是序完备的，则$X_1\times X_2$关于积次序也是序完备的．

如果在$X_1\times X_2$上定义

$$\langle x_1,x_2\rangle\leqslant^*\langle y_1,y_2\rangle\Leftrightarrow x_1<_1 y_1\text{ 或当 }x_1=y_1\text{ 时有 }x_2\leqslant_2 y_2.$$

则$\leqslant^*$是$X\times X_2$上的偏序，称之为$X_1\times X_2$上的字典序．如果$\langle X_1,\leqslant_1\rangle$，$\langle X_2,\leqslant_2\rangle$都是全序的(良序的)，则$X_1\times X_2$关于字典序也是全序的(良序的)．

在偏序集$\langle X,\leqslant\rangle$中，如果$a<b$且$\{x\in X\mid a<x<b\}=\varnothing$，则说$b$是$a$的直接后继元，在良序集$\langle X,\leqslant\rangle$中，除最大元(若存在的话)外，每个元都有唯一的直接后继元．

集合X上的一个关系$\prec$，如果是自反的，传递的，并且$\forall a,b\in X$，$\exists c\in X$ s.t. $a\prec c$且$b\prec c$，则称$\prec$是X上的一个定向，$\langle X,\prec\rangle$叫做有向集．

注　本书关于有向集的定义中，对定向$\prec$不要求有反对称性．而有些著作却是从偏序集出发，定义有向集的，这就使定向具有反对称性，我们在第三章中所用到的有向集，就有定向不满足反对称性的．

Ⅴ　基数与序数

在此，我们不对基数与序数下严格的定义，只是给出它们的一种描述．

集合X与Y若同为空集，或存在一一映射$f:X\to Y$，就说X与Y是对等的，记作$X\sim Y$．对任意一个集合A，赋予一个值，记作$\mathrm{Card}A$并使$\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B\Leftrightarrow A\sim B$．我们就称$\mathrm{Card}A$为$A$的基数(或叫$A$的势)．并规定$n$元集的基数就是$n$，$\mathrm{Card}\varnothing=0$，$\mathrm{Card}\mathbf{N}=\aleph_0$，$\mathrm{Card}\mathbf{R}=c$．

我们定义：$\mathrm{Card}A\leqslant\mathrm{Card}B\Leftrightarrow A=\varnothing$或存在单射$f:A\to B$(等价地，存在满射$g:B\to A$)．

定理Ⅴ.1 (Bernstein) 对任意两个集合A,B，都有

$$(\mathrm{Card}A\leqslant\mathrm{Card}B\text{ 且 }\mathrm{Card}B\leqslant\mathrm{Card}A)\Rightarrow\mathrm{Card}A=\mathrm{Card}B.$$

于是任一由基数构成的集合上由$\leqslant$确定的关系是一个偏序．

定理Ⅴ.2　(1) $0<n<\aleph_0<c\ (n\in\mathbf{N})$.

(2) 设 $\mathrm{Card}A=a$，如果 $a=0$，我们记 $2^a=1$，如果 $a>0$，记 $2^a=\mathrm{Card}\{0,1\}^A$，那么总有 $\mathrm{Card}\mathscr{P}(A)=2^a$.

(3) 对任一基数 a，总有 $a<2^a$.

(4) $2^{\aleph_0}=c$.

现在自然要问，当 $a\geqslant\aleph_0$ 时，在 a 与 2^a 之间是否还存在另一个基数呢？在历史上有两种假设，一种说不存在，一种说存在．说不存在的，称为(广义)连续统假设，现在大多采用这一假设．已经有人证明这两种假设都不会与集合论原有的公理系统发生矛盾．

关于基数的代数运算定义如下：

设 $\alpha=\mathrm{card}A$，$\beta=\mathrm{Card}B$ 则定义：

$$\alpha+\beta=\mathrm{Card}((A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})).$$

$$\alpha\cdot\beta=\mathrm{Card}(A\times B).$$

当 $\alpha\neq0$ 时，定义 $\alpha^0=1$；

当 $\alpha\neq0,\beta\neq0$ 时，定义 $\alpha^\beta=\mathrm{Card}A^B$.

如果 $A\cap B=\varnothing$ 时，也有 $\alpha+\beta=\mathrm{Card}(A\cup B)$.

定理Ⅴ.3　设 α,β,γ 都是基数，当运算有定义时，有下述等式成立：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$，　　(2) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$，

(3) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$，　　(4) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$，

(5) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$，　　(6) $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$，

(7) $(\alpha\cdot\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$，　　(8) $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

定理Ⅴ.4　设 α,β,γ 为基数，$\alpha\leqslant\beta$，当运算有定义时，下述不等式成立：

(1) $\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$，　　(2) $\alpha\cdot\gamma\leqslant\beta\cdot\gamma$，

(3) $\alpha^\gamma\leqslant\beta^\gamma$，　　(4) $\gamma^\alpha\leqslant\gamma^\beta$.

利用基数运算的上述定理以及 Bernstein 定理和可数集的性质可得：$\forall\ n\in\mathbf{N}$，

$n\aleph_0=\aleph_0^n=\aleph_0$，　　$\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$，

$n+c=\aleph_0+c=c+c=n\cdot c=\aleph_0\cdot c=c\cdot c=c$，

$c^n=c^{\aleph_0}=c$，

$n^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}=c$，

$c^c=2^c$.

设 $\langle X,\leqslant\rangle$ 为良序集，$a\in X$，集合

$$X_a\xlongequal{\text{def}}\{x\in X\mid x<a\}$$

叫做由 a 决定的 X 的截段．

类似于普通的数学归纳法，有下述超限归纳原理，它对于许多高基数问题是非常有用的．

定理Ⅴ.5(超限归纳原理)　设 $\langle X,\leqslant\rangle$ 为良序集，$P\subset X$．如果满足条件

(1) $a=\min X\in P$，

(2) $\forall\ b\in X$，$X_b\in P\Rightarrow b\in P$，

那么 $P=X$.

注　上述条件(1)事实上已包含在(2)中，这里所以特别指出，是为使用的方便，因在使用时，正如普通的归纳原理一样，首先要检验最小元，然后再由归纳假设 $X_b\subset P$ 推证 $b\in P$.

设 $\langle X,\leqslant_X\rangle$，$\langle Y,\leqslant_Y\rangle$ 为偏序集，如果存在一一映射 $f: X\to Y$ 使

$$\forall\, x_1,x_2\in X,\ f(x_1)<_Y f(x_2)\Leftrightarrow x_1<_X x_2,$$

则说 X 与 Y 相似．如果 $X=Y=\varnothing$，或 X 与 Y 相似，就说 X 与 Y 有相同的序型，良序集的序型叫做序数．X 的序数记为 $\mathrm{Ord}X$. 并记

$\mathrm{Ord}\varnothing=0$,

$\mathrm{Ord}\{1,2,\cdots,n\}=n\quad(n\in\mathbf{N})$,

$\mathrm{Ord}\mathbf{N}=\omega$，这里 $\mathbf{N}$ 具有通常的次序．

定理Ⅴ.6　良序集与其任一截段都不相似，特别是良序集的不同截段之间彼此不相似．

利用这个定理可以在由序数组成的集合上定义偏序如下：

设 α,β 为序数，A,B 分别为具有序型 α,β 的良序集．如果 A 相似于 B 的一个截段，则说 $\alpha<\beta$. 显然在任一由序数组成的集合中这样定义的关系 $<$ 是传递的反自反的．从而由此导出偏序 $\leqslant$.

利用超限归纳原理可以证明在“$\leqslant$”之下，任意两个序数都可比较，再进一步可得任一由序数构成的集合都是良序集．

现设 α 为序数，记 $[0,\alpha)$ 为由一切小于 α 的序数构成的集合．

定理Ⅴ.7　对任一序数 α，都有 $\alpha=\mathrm{Ord}[0,\alpha)$.

我们已知 ω 是通常次序下 $\mathbf{N}$ 的序型，现在它也是 $[0,\omega)$ 的序型，所以 $\mathrm{Card}[0,\omega)=\aleph_0$，而 $[0,\omega)$ 的每个截段相似于 $\mathbf{N}$ 的一个截段，所以是有限的，即 $\forall\,\alpha<\omega$, $\mathrm{Card}[0,\alpha)<\aleph_0$. 据此我们称 ω 为第一个(最小的)无限序数．类似地，还有一个很重要的序数，叫做第一(最小的)不可数序数，记作 Ω，使 $\mathrm{Card}[0,\Omega)=c$，并且 $[0,\Omega)$ 的每个截段都是可数的．对于 Ω，下述定理是有用的．

定理Ⅴ.8　设 A 为 $[0,\Omega)$ 的可数子集，则 $\exists\,\beta\in[0,\Omega)$ s.t. $\forall\,\alpha\in A$，都有 $\alpha\leqslant\beta$(即 β 为 A 的上界).

Ⅵ　选择公理

笛卡儿积 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 中的点 $x=\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个映射 $x: \Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 使 $\forall\,\lambda\in\Lambda$, $x(\lambda)\in X_\lambda$. 形象地看 x 的作用就是同时在每个 X_λ 中选出一点 x_λ 来，所以可称 x 为选择函数．当 $\exists\,\lambda\in\Lambda$ 使 $X_\lambda=\varnothing$ 时，在 X_λ 中选不到点，自然也就不存在所谓选择函数．从而 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\varnothing$. 反过来，当 $\forall\,\lambda\in\Lambda, X_\lambda\neq\varnothing$ 时，一定存在选择函数，看来似乎也很合理，却无法作出证明，更使人惊奇的是，对于这种选择函数存在性的假定引出了许多意想不到的等价命题．在历史上引起许多争论．Zermelo 第一个明确地叙述了这个假设并称之为选择公理，后来有人证明了只要集合论的公理系统自身没有矛盾，那就不会因为引进选择公理而产生矛盾．

选择公理　对于任一由非空集合组成的非空族 $\mathscr{A}$，总存在映射 $c: \mathscr{A}\to\bigcup\mathscr{A}$ 使 $\forall\,A\in\mathscr{A}$, $c(A)\in A$. 称 c 为选择函数．

若 $\mathscr{A}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\Lambda\neq\varnothing$，$\forall\lambda$，$A_\lambda\neq\varnothing$，则等价地 $\exists\, c:\Lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ s.t. $\forall\lambda$，$c(\lambda)\in A_\lambda$.

用笛卡积的语言，等价于：非空集合的非空族，其笛卡儿积非空.

定理Ⅵ.1　下列陈述彼此等价：

(1) 选择公理(如上).

(2) 良序原理：任一非空集合都有一个良序.

(3) Hausdorff 极大原理：设 $\langle X,\leqslant\rangle$ 为偏序集，A 为 X 的全序子集，则存在包含 A 的极大全序子集 B.

(4) Zorn 引理：如果偏序集 $\langle X,\leqslant\rangle$ 的每个全序子集都有上界，则 X 有极大元.

参考书目

[1] 陆文钊,陈肇姜,点集拓扑学,南京大学出版社,1995.

[2] 蒲保明等,拓扑学,高等教育出版社,1985.

[3] 熊金城,点集拓扑学讲义,人民教育出版社,1981.

[4] J.R.Munkres, Topology: A First Course, Prentice—Hall, Inc., 1975(中译本:拓扑学基本教程,罗嵩龄等译,科学出版社).

[5] L. A., Steen, J. A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology, 2th-Edition, Springer-Verlay, New York, 1978.

[6] R. Engelking, General Topology, Warszawa, 1977.

[7] J. L. Kelley, General Topology, Princeton, New Jersey, 1955; Springer-Verlay, New York, 1975.(中译本:一般拓扑学,吴从炘,吴让泉译,科学出版社).

[8] W. J. Pervin, Foundations of General Topolgy, Academic Press, New York, 1964.